



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### **Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### **About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

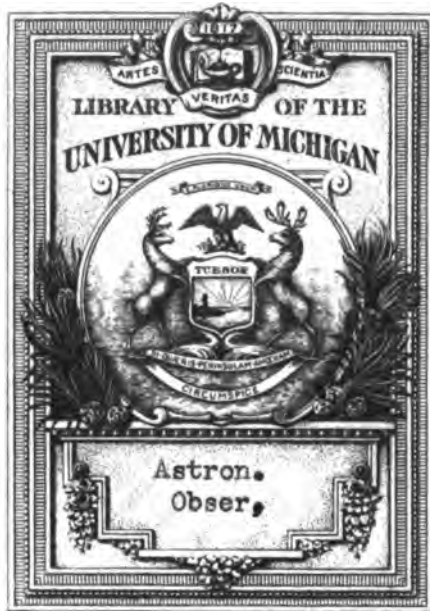
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

Astron. Obs.

QB  
357  
.L65

B 504190

STOR  
3 e 3



THE GIFT OF  
**Lewis F. Strong**

ASTRON.  
OBS.  
QB  
357  
.L65

Seinem hochverehrten Lehrer  
Herrn Professor Schauberte  
in Dankbarkeit gewidmet

A. P. Leuschner

Berkeley 1897 October 18 \_\_\_\_\_



# Beiträge zur Kometenbahnbestimmung.

---

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde von der Philosophischen Facultät

der

**Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin**

Genehmigt und nebst den beigefügten Thesen öffentlich zu verteidigen

am 11. August 1897

von

**Armin Otto Leuschner, A. B.,**

Asst. Professor der Astronomie und Geodäsie an der Universität von Kalifornien,

aus Detroit, Michigan, U. S. A.



Opponenten:

Herr **B. Messow**, stud. astron.

Herr **G. Hessenberg**, cand. math.

Herr **G. Witt**, Abteilungsvorstand der Sternwarte Urania.

---

BERLIN 1897.

Druck von G. Bernstein.









Auftrag Oberw.  
H. v. L. v. L.  
7-5-33

## Einleitung.

---

In den allgemeinen Betrachtungen des ersten Kapitels der vorliegenden Schrift wird die Notwendigkeit dargelegt:

1. einer eingehenden Zusammenstellung der in den verschiedenen Methoden der Kometenbahnbestimmung auftretenden Genauigkeitsmomente mit Rücksicht auf die in jedem Falle durch das zu Grunde gelegte Material gegebenen besonderen Bedingungen,
2. von Formeln, aus denen sich die durch eine Änderung in  $q_1$  und  $q_2$  bedingten Änderungen der Elemente erkennen lassen.

Im zweiten Kapitel werden sodann Formeln, wie sie in 2) angedeutet sind, aufgestellt. Dieselben dienen zugleich zur Verbesserung erster Elemente auf differentiellen Wege.

Hieran schließt sich im dritten Kapitel eine besondere Formel zur Berechnung der durch eine Änderung in  $M$  bedingten Korrektur von  $q_1$ , einschließlic derjenigen Glieder, welche von dem Quadrate der Änderung in  $M$  abhängig sind.

Die von den Änderungen in  $q_1$  und  $q_2$  abhängigen Glieder zweiter Ordnung der Korrekturen der Elemente sind ebenfalls entwickelt worden, doch muss die Veröffentlichung derselben, sowie die völlige Auswertung der im zweiten Kapitel aufgestellten Formeln auf eine spätere Zeit verschoben werden, so dass die vorliegenden Untersuchungen noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden dürfen.

68-11-33/104



## I. Allgemeine Betrachtungen.

---

Das Problem der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers bietet bekanntlich deshalb Schwierigkeit, weil zu Beginn der Rechnung die zu den Beobachtungszeiten gehörigen heliocentrischen oder geocentrischen Distanzen desselben völlig unbekannt sind. In den soweit bekannten Methoden der Bahnbestimmung wird daher die Lösung der Aufgabe dadurch erzielt, dass mit Hilfe der bekannten Zwischenzeiten Näherungen für die Verhältnisse der von dem Radiusvector beschriebenen Dreiecksflächen in die Fundamentalgleichungen eingeführt werden, wodurch die Möglichkeit gegeben ist, genäherte Werte für die Distanzen zu berechnen. Diese bilden dann die Grundlage für die Ableitung der Elemente oder auch für weitere Approximationen, wenn solche notwendig erscheinen. Der Zweck einer ersten Bahnbestimmung ist entweder, sich eine zur Aufsuchung und Verfolgung des Gestirnes hinreichend genaue Ephemeride zu verschaffen oder auch Ausgangselemente für eine endgültige Bahn aufzustellen. In beiden Fällen wird man bestrebt sein, Elemente abzuleiten, die von den wirklichen nur wenig verschieden sind. Außerdem wird man sich bemühen, ein derart günstiges Resultat auf möglichst raschem Wege zu erzielen. Die eben aufgestellten Principien, große Genauigkeit und schnelle Lösung, können selten gleichzeitig eingehalten werden. Man wird daher zu entscheiden haben, in wie weit jedem der beiden Rechnung getragen werden kann und danach die Methode der Bahnbestimmung wählen. Wenn es sich nun auch herausgestellt hat, dass die eine oder die andere Methode in vielen Fällen den Vorzug verdient, so hat die Erfahrung doch auch gelehrt, dass es bis jetzt noch keine einzige Methode giebt, welche, ohne weitläufige Rechnungen zu verursachen, auf alle Fälle anwendbar wäre. Die Leistungsfähigkeit einer Methode ist jedenfalls nach der Annäherung zu beurteilen, welche in der sogenannten ersten Hypothese erreicht wird, wenn die Excentricität unbestimmt gelassen wird, oder in parabolischen Bahnen nach der Richtigkeit der ersten Annahme für das Verhältnis der dritten zur ersten geocentrischen Distanz ( $M$ ). Aber nicht hiervon allein hängt die Genauigkeit des Resultates ab, sondern es lassen sich noch andere Momente anführen, die unter Umständen die Bahnbestimmung beeinflussen können. Zu diesen rechne

ich bei ersten Kometenbahnen auch die Elimination der Parallaxe, obwohl die meisten Lehrbücher den Standpunkt einnehmen, dass die Vernachlässigung dieser Correction das Resultat nicht wesentlich schädigen kann. Die meisten Rechner scheinen bei ersten Bahnbestimmungen auch etwas schablonenhaft zu verfahren, namentlich, wenn sie sich durch mehrfachen Gebrauch einer speziellen Methode an dieselbe gewöhnt haben. Sie lassen es dann lieber darauf ankommen, später den Wert von  $M$  verbessern zu müssen, oder, wenn die Zwischenzeiten sehr klein waren, sich eines größeren Bogens bedienen zu müssen, als dass sie sich gleich zu Anfang der Rechnung, soweit dies dann möglich ist, klar zu machen suchten, auf welche Weise aus dem gegebenen Material mit dem geringsten Aufwand von Mühe das beste Resultat zu erzielen ist. Häufig auch hat man sich mit einer Genauigkeit begnügt, die lange nicht derjenigen entspricht, welche hätte erreicht werden können. Die astronomischen Zeitschriften ergeben in genügender Anzahl Fälle, in welchen der eine Rechner aus verhältnismäßig kleinem Bogen bedeutend bessere Resultate erzielt hat, als ein anderer, welcher seine Rechnung auf erheblich größeren Bogen stützte. Der weniger glückliche Rechner schrieb dann wohl — meistens irrtümlicher Weise — die Ursache dieser Erscheinung den zu Grunde gelegten Beobachtungen zu. Infolge dieses Fehlschlagens erster Bahnbestimmungen hat sich einerseits die Überzeugung eingebürgert, dass man bei Bogen von wenigen Tagen nie mehr als eine ganz rohe Annäherung erhoffen darf,\*) andererseits ist man bestrebt gewesen, genauere Methoden mit Berücksichtigung höherer Potenzen der Zwischenzeiten aufzustellen. Obwohl durch diese Bestrebungen viele neue Gesichtspunkte eröffnet worden sind, giebt es, wie bereits oben erwähnt, noch keine kurze Methode, welche auf alle Fälle anwendbar wäre, und können wir, der Natur des Problems nach zu schließen, in absehbarer Zeit wohl kaum auf eine solche hoffen. Auch glaube ich, dass bei der mit den größeren Fernröhren bereits erreichten Genauigkeit der Beobachtungen und dem stetigen Fortschritt in der Beobachtungskunst, die uns heute zur Verfügung stehenden Methoden zur Berechnung von verhältnismäßig genauen ersten Kometenbahnen, selbst aus eintägigen Zwischenzeiten, ausreichend sind, und dass die Zahl der Fälle, in welchen weitläufige Rechnungen notwendig werden, eine äußerst geringe ist. Es fehlt uns aber bis jetzt:

1. eine eingehende Erörterung und Übersicht der in den verschiedenen Methoden für die Genauigkeit des Resultates maßgebenden Faktoren mit Rücksicht auf die durch das vorgelegte Material gestellten Bedingungen, soweit dieselben am Anfang der Rechnung erkenntlich sind.
2. Formeln, aus welchen sich der Einfluss einer Änderung in  $M$  auf die Elemente und die Darstellung des mittleren Ortes erkennen lässt.

---

\*) Prof. Dr. E. Weiss, Über die Berechnung einer Kometenbahn mit Berücksichtigung von Gliedern höherer Ordnung. Sitzungsber. d. Kais. Ak. d. Wiss. in Wien, Math.-Naturw. Klasse; Bd. C, II. a. Nov. 1891, Seite 1.

Der Versuch einer Beseitigung des ersteren Bedürfnisses muss einer besonderen Abhandlung vorbehalten bleiben. Es mögen zunächst in den hier folgenden § 1 und § 2 einige dabei Ausschlag gebende Gesichtspunkte angeführt werden, während im folgenden Kapitel die differentiellen Beziehungen einer Änderung in  $M$  und den dadurch in den Elementen und in der Darstellung des mittleren Ortes bedingten Änderungen in Formeln ausgedrückt werden sollen.

### § 1.

Was zunächst die Genauigkeit des zu Grunde gelegten Materiales anbetrifft, so wird stets darauf hingewiesen, dass man nicht eine Genauigkeit in der Bahnbestimmung anstreben solle, die in keinem Verhältnis zu den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern stehe. Dies ist auch ganz richtig, aber, wenn es sich darum handelt, die Anwendbarkeit der bekannten Methoden auf die verschiedenen in der Praxis vorkommenden Fälle zu prüfen, so ist es vorzuziehen, vor der Hand die Beobachtungsfehler ganz unberücksichtigt zu lassen. Wie schon hervorgehoben wurde, misst man überhaupt den Beobachtungsfehlern zu viel Schuld bei, wenn einmal eine erste Bahn nicht nach Wunsch ausfällt. Die Aufgabe ist demnach so zu behandeln, als ob es darauf ankäme, eine möglichst genaue Bahn auf möglichst raschem Wege aus drei absolut fehlerfreien Beobachtungen zu berechnen. Diejenige Methode, welche dann die geeignetste ist, wird es im allgemeinen auch bleiben, wenn die Beobachtungen mit Fehlern behaftet sind. Unzweifelhaft wird ja öfters die aus anderen Momenten resultierende Ungenauigkeit durch die Beobachtungsfehler noch vergrößert werden, aber auch das Gegenteil kann eintreten. Da sich der Einfluss derselben eben im Voraus nicht genau bestimmen lässt, so kann auch nichts dadurch gewonnen werden, Größenschätzungen derselben vorzunehmen. Handelt es sich um systematische Fehler, so sind dieselben ohnehin nicht von großer Bedeutung.

Die Genauigkeit der die Verhältnisse der Dreiecksflächen ersetzenden Ausdrücke ist von der größten Wichtigkeit für eine erfolgreiche erste Bahnbestimmung von Kometen und Planeten. Diese Ausdrücke sind gewöhnlich die Anfangsglieder von konvergenten Reihen, welche nach Potenzen der Zwischenzeiten fortschreiten, außerdem aber auch negative Potenzen der heliozentrischen Distanzen und die Differentialquotienten dieser letzteren enthalten. In der Gibbs'schen Methode\*) stellen die für die Verhältnisse adoptierten Ausdrücke zwar nicht die Anfangsglieder vorher abgeleiteter Reihen dar, aber sie lassen sich doch in ähnlicher Weise wie die in anderen Methoden vorkommenden Anfangsglieder ansetzen, wie dies auch schon Weiss gethan hat zwecks Vergleichung der von ihm aufgestellten Reihe mit dem genäherten Ausdruck, den Gibbs benutzt.\*\*)

\*) J. Willard Gibbs, On the Determination of Elliptic Orbits from three complete Observations, National Academy of Sciences, vol. IV, Eighth Memoir.

\*\*\*) Prof. Dr. E. Weiss, Über die Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen, Bd. XL d. Denkschriften d. Math.-Naturw. Klasse d. Kais. Ak. d. Wiss., 1893.

Abhandlung hat nun Weiss eine neue Reihe für die Verhältnisse der Dreiecksflächen aufgestellt und hat mit Hilfe derselben elegante Formelsysteme zur Berechnung erster Planeten- und Kometenbahnen aufgebaut. Ausserdem aber hat er eine sorgfältige Untersuchung über die in seiner eigenen und in anderen Methoden erzielte Annäherung in den Verhältnissen der Dreiecksflächen angestellt (§ 4). Er findet mit Encke, dass Gauss, aufser bei gleichen Zwischenzeiten, in seiner ersten Annäherung bereits Gröfsen zweiter Ordnung vernachlässigt, wenn man den für die Konvergenz der Reihen maßgebenden Quotienten  $\frac{\Theta}{r\sqrt{r}}$  als eine Gröfse erster Ordnung betrachtet, und dass durch besondere Umstände der Fehler in den Fundamentalgleichungen auf eine Gröfse dritter Ordnung herabgedrückt wird. Weiss macht hierbei darauf aufmerksam, dass man in der Beurteilung der Gröfsenordnung der einzelnen Glieder bisher nie gebührend beachtet habe, dass die Zwischenzeiten nicht allein Ausschlag gebend seien, indem man die Glieder lediglich nach diesen zu klassifizieren pflege (Seite 9, § 3). Dem entgegen lassen sich eine Reihe von Stellen aus dem vortrefflichen Lehrbuche v. Oppolzer's anführen, z. B. Bd. I, Seite 353 heifst es: „Die Verhältnisse . . . können nur, solange das Produkt aus dem Quadrate der Zwischenzeit in die negative dritte Potenz des Radiusvektors eine mäfsige Gröfse ist, . . . näherungsweise bestimmt werden. Ähnliche Bemerkungen finden sich auf Seite 94, 282, 356 u. s. w. Übereinstimmend mit Oppolzer zeigt Weiss, dass ersterer in seiner ersten Annäherung noch einschliesslich Glieder dritter Ordnung berücksichtigt, doch bestreitet er, dass die Glieder vierter Ordnung bei gleichen Zwischenzeiten verschwinden, vielmehr ständen dieselben dann im Maximum. Interessant ist besonders das für die Gibbs'sche Methode gefundene Resultat, in welcher selbst bei ungleichen Zwischenzeiten der Fehler auf eine Gröfse fünfter Ordnung sinkt. Dies ist aber eine unmittelbare Folge der Gleichung, von welcher Gibbs ausgeht, und welche lautet:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{A} + t\mathfrak{B} + t^2\mathfrak{C} + t^3\mathfrak{D} + t^4\mathfrak{E},$$

wo  $\mathfrak{R}$  der zu der Zeit  $t=0$  gehörige Vektor und  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{E}$  Vektorkonstanten sind. Er nimmt also von Anfang an noch Glieder vierter Ordnung in Bezug auf die Zwischenzeiten mit, und es steht daher von vornherein zu erwarten, dass auch die Dreiecksflächen, welche die Form

$$R_m R_n$$

haben, und die Verhältnisse derselben einschliesslich Gröfsen vierter Ordnung in Bezug auf die Zwischenzeiten richtig sind. Was nun die Methoden von Weiss anbetrifft, so werden in Planetenbahnen im besten Falle (§ 12 der Abhandlung) noch ein Teil der Glieder vierter Ordnung mitgenommen, während in Kometenbahnen nur Glieder dritter Ordnung berücksichtigt werden, welche mit II bezeichnet sind.



Aus dem Vorhergehenden ist ersichtlich, dass man in der Bahnbestimmung auf mannigfache Weise, was die Zahl der mitzunehmenden Glieder höherer Ordnung anbetrifft, vorgehen kann. Die Genauigkeit des Resultates wird natürlich je nach dem eingeschlagenen Verfahren eine grössere oder geringere sein.

Weiss ist durchaus nicht damit einverstanden, den von ihm aufgestellten und mit II, III, IV bezeichneten Ausdrücken bestimmte Grössenbezeichnungen beizulegen, und war dies hier auch nur provisorisch und zum Zweck einer besseren Übersicht geschehen. Dies zu thun, würde nur dann richtig sein, wenn die numerische Grösse der sogenannten Glieder höherer Ordnung stets der theoretischen Grössenordnung entspräche, welche denselben gemäss ihrer analytischen Form beigemessen worden ist. Da dies nun aber nicht der Fall ist (vergleiche auch die beiden bereits citierten Abhandlungen von Weiss, Seite 3 der ersten und Seite 24 der zweiten), so kann die Abschätzung der in einem gegebenen Falle zu erwartenden Genauigkeit nach der theoretischen Grössenordnung der in der angewandten Methode mitgenommenen Glieder höherer Ordnung leicht zu Täuschungen führen, und verlieren derartige Erwägungen dann an Wert. Es müssen eben die in den verschiedenen Methoden für die Genauigkeit maassgebenden Kennzeichen nicht nur theoretisch, sondern auch mit Rücksicht auf die in der Praxis durch das gegebene Material in jedem Falle gestellten Bedingungen untersucht werden, wie es v. Oppolzer auch schon teilweise für die in seinem Lehrbuche enthaltenen Methoden gethan hat, und zwar für Planetenbahnen durch seine dem ersten Bande angehängten Tafeln XIII und für parabolische Bahnen durch sein die Wahl zwischen der Olber'schen und seiner eigenen Methode entscheidendes Kriterium, Bd I, Seite 287. Es ist nicht genügend, nur im allgemeinen nach der Bewegung, den Zwischenzeiten etc. zu urteilen, sondern die Untersuchung muss mit Rücksicht auf ganz bestimmte numerische Werte aller maassgebenden Grössen angestellt werden. Nur dann kann man hoffen, die Vorteile und Nachteile der einzelnen Methoden klar ans Licht zu bringen, und es werden sich dann auch wohl genügend Kriterien aufstellen lassen, nach denen man sich bei Beginn der Rechnung richten kann. Auch dürfte die Erkenntnis der einer Methode in einem gegebenen Falle anhaftenden Mängel leichter zur Entdeckung einer Abhilfe für dieselbe führen. Gewöhnt sich der Anfänger an das Studium der Vorbedingungen, so wird er unzweifelhaft die Überzeugung gewinnen, dass die auf Seite 2 gemachte Behauptung, dass der uns heute zur Verfügung stehende Formelapparat zur Bestimmung verhältnismässig genauer ersten Kometenbahnen ausreicht, richtig ist.

In seiner bereits öfters citierten Abhandlung: „Über die Bestimmung etc.“ hat Weiss bereits den Weg betreten, die in seiner Methode vorkommenden Glieder numerisch auszuwerten, aber leider nur mit Rücksicht auf die Zwischenzeiten und die Werte von  $q = r = 1$ ,  $\epsilon = 0.7$ , soweit die Kometen in Betracht kommen. Das gesamte Zeitintervall zwischen der ersten und dritten Beobachtung ist zwischen

20 und 40 Tagen gehalten. Abgesehen von einigen kleinen Versehen, die dabei vorgekommen sind, ist diese Untersuchung ein bedeutender Fortschritt, insofern durch sie numerisch nachgewiesen wird, in welche Täuschungen man verfallen kann, wenn man Glieder nur nach theoretischen Größenordnungen klassifiziert.

Die überraschende Einfachheit der neuen von Weiss zur Berechnung von ersten Kometenbahnen aufgestellten Formeln, rechtfertigt uns, diesen allgemeinen Betrachtungen noch einige spezielle Bemerkungen über die Methode von Weiss beizufügen. Bei einer neuen Methode ist es meines Erachtens nach von Wichtigkeit, dass dieselbe für kleine Zwischenzeiten und geringe Bewegungen, besondere Vorteile gewährt; denn bei der Schnelligkeit, mit welcher jetzt Kometenentdeckungen auf den Sternwarten bekannt werden und bei der Zahl der großen Fernröhre in verschiedenen Teilen der Erde, steht zu erwarten, dass stets dem Rechner bereits in den ersten Tagen nach der Entdeckung eines Kometen die zu einer ersten Bahnbestimmung notwendigen Beobachtungen zur Verfügung stehen. Dies war in Californien in den letzten Jahren durchweg der Fall. Sieht man von dem sogenannten Ausnahmefall ab, der auch in der Weiss'schen Methode eine besondere Behandlung erheischt, so ist es klar, dass unter normalen Verhältnissen die drei Beobachtungen nie sehr stark von einem größten Kreise abweichen, wenn die Zwischenzeiten klein sind, so dass  $\sin(Q_1 - Q_3)$  sehr klein sein muss (siehe die Formeln auf Seite 44 und 45 der Abhandlung von Weiss). Man wird  $\sin(Q_1 - Q_3)$  daher nur dann genau bestimmen können, wenn die Werte von  $Q_1, Q_2, Q_3$  sehr genau bestimmt worden sind, was unter Umständen 7stellige Logarithmen erheischen würde, speziell wenn man die im Formelsysteme III enthaltene Probestformel benutzen will. (Siehe das unten folgende Beispiel.) Ist aber  $\sin(Q_1 - Q_3)$  unbedeutend, so leidet die Genauigkeit von  $\gamma$ , namentlich wenn  $q_2$  nicht von der Größenordnung von  $\sin(Q_1 - Q_3)$  ist. Auf Seite 5 der Abhandlung, finden wir zwar die Bemerkung, dass die  $q$  von der Größenordnung der geocentrischen Bewegung des Gestirnes in den Zwischenzeiten sind, also von der ersten etc. . . ., aber aus den Formeln auf Seite 4 ersieht man sofort, dass  $q$  stets größer als die Einheit ist, sobald  $\lambda_3 - \lambda_2 > Q_1 - \lambda_2$ , was leicht eintreten kann, wenn die Bewegung des Kometen in Breite diejenige in Länge mehrfach übersteigt. Durch die Ungenauigkeit von  $\gamma$  leidet aber auch  $W$  und somit auch  $\rho_2$ . Es sollen nun diese Bemerkungen an einem Beispiel erläutert werden. Vorher möge jedoch noch eine Formel Platz finden, wonach man in der Methode von Weiss die Korrektion bestimmen kann, welche an den Wert von  $\log r_2$  anzubringen ist, um im folgenden Versuche eine rasche Convergenz zu erzielen. Bezeichnet man den Anfangs- und den Endwert von  $\log r_2$  beziehungsweise mit  $\log r_a$  und  $\log r_e$ , so muss, damit der nächste Versuch die erwünschte Lösung mit sich bringt, sein:

$$\log r_a + d \log r_a = \log r_e + d \log r_e$$

oder auch

$$\log r_a - \log r_e = d \log r_a \left( \frac{d \log r_e}{d \log r_a} - 1 \right). \quad 1)$$

Da nun:

$$\frac{d \log r_e}{d \log r_a} = \frac{d \log r_e}{d \log \varrho_2} \frac{d \log \varrho_2}{d \log r_a} \quad 2)$$

ist, so erübrigt nur noch, die beiden Differentialquotienten rechter Hand aus den drei Formeln IV, Seite 45 der Abhandlung von Weiss zu bestimmen. Die Differentiation der ersten Formel ergibt:

$$\frac{d \log \varrho_2}{d \log r_a} = \frac{3}{r_a^3} \left[ \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{0.1 \Theta_2^2}{1 + \frac{0.1 \Theta_2^2}{R_2^3} + \frac{0.1 \Theta_2^2}{r_a^3}} \right]. \quad 3)$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man:

$$\frac{d \vartheta \text{ Mod.}}{\sin \vartheta \cos \vartheta} = \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - f_2} d \log \varrho_2, \quad 4)$$

und aus der dritten:

$$d \log r_e = \tan \vartheta_2 d \vartheta_2 \text{ Mod.},$$

oder mit Benutzung von 4):

$$d \log r_e = \frac{\varrho_2 \sin^2 \vartheta_2}{\varrho_2 - f_2} d \log \varrho_2. \quad 5)$$

Die Verbindung der Gleichungen 1), 2), 3) und 5) führt schliesslich zu folgender Formel für die Korrektur, die an den Ausgangswert  $\log r_a$  anzubringen ist:

$$d \log r_a = \frac{\log r_a - \log r_e}{\frac{3 \varrho_2 \tan \vartheta_2 \cos^2 \vartheta_2}{r_a^3 B_2} \left[ \frac{1}{R_2^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{0.1 \Theta_2^2}{1 + 0.1 \Theta_2^2 \left( \frac{1}{R_2^3} + \frac{1}{r_a^3} \right)} \right] - 1}. \quad 6)$$

So kompliziert diese Formel auch aussehen mag, so ist die Rechnung nach derselben doch äusserst einfach, da die beiden Quotienten in der eckigen Klammer, sowie alle übrigen Grössen aus dem vorhergehenden Versuch bereits bekannt sind.

Als Beispiel wähle ich eine erste Bahnbestimmung des Kometen 1896 *b* (Swift) aus den drei ersten Beobachtungen der Licksternwarte. Nach Anbringung der nötigen Korrekturen, einschliesslich der Reduktion auf den locus fictus, ergab sich als zu Grunde zu legendes Material, auf den Meridian von Berlin bezogen:

$t = 1896$ April	$\lambda$	$\beta$	$L$	$\log R$
16.7268	56° 37' 5".0	- 1° 7' 2".3	27° 37' 46".2	0.001659
17.7082	57 5 18 .5	+ 1 26 54 .1	28 37 35 .8	0.002309
19.7063	57 53 25 .3	6 48 10 .4	30 33 48 .5	0.002364

Hieraus berechnete ich zusammen mit Herrn F. H. Seares, Assistent der Sternwarte zu Berkeley, erste Elemente nach der Methode von Olbers. Die Anwendung des Oppolzer'schen Kriteriums ergab 0,98 als die zu erwartende Genauigkeit, wenn die Genauigkeit der Oppolzer'schen der Einheit gleich gesetzt wird. Es ist dies also ein für die Anwendung der Olbers'schen Methode äußerst günstiger Fall. Eine Verbesserung der ersten Annahme für  $\log M$  war nicht notwendig. Die Elemente, welche im „Astronomical Journal“ veröffentlicht sind, wichen kaum von den später aus Normalörter abgeleiteten ab. Der Vergleich einer am 29. April, also nach 10 Tagen, auf der Sternwarte zu Berkeley (Students' Observatory) angestellten Beobachtung mit der Ephemeride zeigte folgende geringfügige Abweichungen im Sinne Beobachtung — Rechnung:

$$\Delta\alpha = -1^{\circ}.4 \qquad \Delta\beta = -0'.2.$$

Die hier besonders in Betracht kommenden Werte von  $\log q$  und  $\log M$ , welche zur Unterscheidung von den später anzuführenden, aus der Weiss'schen Methode resultierenden Werten mit dem Subscripte  $0$  bezeichnet werden sollen, waren:

$$[\log q_1]_0 = 9.769105; \quad [\log q_2]_0 = 9.758115; \quad [\log M]_0 = 9.989010.$$

Rechnet man hingegen nach den Formeln von Weiss, Seite 44 der Abhandlung, so hat man zunächst:

$$\begin{aligned} Q_1 &= 56^{\circ} 52' 22''.148; & Q_1 - Q_3 &= 0^{\circ} 2' 59''.694; & \log q_1 &= 0.570344 \\ Q_2 &= 236 47 48 .566; & Q_2 - Q_3 &= 179 58 26 .112; & \log q_2 &= 0.852266 \\ Q_3 &= 56 49 22 .454; & Q_1 - Q_2 &= 180 4 33 .582; & \log q_3 &= 0.248303 \end{aligned}$$

Die Winkel sind bis zu 3 Decimalen der Sekunde angesetzt, weil es wegen der Kleinheit der Differenzen in der zweiten Columnne sonst nicht möglich gewesen wäre, in der Probeformel eine vollständige Übereinstimmung der 3 Werte zu erlangen. Die Ursache liegt unstreitbar darin, dass die Beobachtungen nahezu in einem größten Kreise liegen, aber dies wird in dem Maße, wie es hier der Fall ist, bei so kleinen Zwischenzeiten fast immer eintreffen, so dass man dann stets Specialformeln anwenden müsste, wodurch die Methode an Allgemeinheit verlieren würde. Was nun die Werthe der  $q$  anbelangt, so können dieselben unmöglich als Größen von der Ordnung der geocentrischen Bewegungen aufgefasst werden. Die in den Zwischenzeiten beschriebenen geocentrischen Bogen ( $d$ ) lassen sich aus den Koordinaten  $\lambda$  und  $\beta$  leicht berechnen nach den Formeln:

$$\text{tang } G = \cot \delta_m \cos(\alpha_n - \alpha_m); \quad \text{tang } B = \frac{\text{tang}(\alpha_n - \alpha_m) \sin G}{\cos(\delta_n + G)}; \quad \text{tang } d = \frac{\cot(\delta_n + G)}{\cos B},$$

oder, wenn man setzt:

$$\sin(\lambda_m - \lambda_n) = \text{tang}(\lambda_m - \lambda_n) = (\lambda_m - \lambda_n) \sin 1''; \quad \cos(\lambda_m - \lambda_n) = 1 \quad \text{etc.},$$

so dass

$$G = 90^\circ - \beta_m,$$

kann man die Formeln auch schreiben:

$$\text{tang } B = \frac{\lambda_n - \lambda_m}{\beta_m - \beta_n} \cos \beta_m; \quad \text{tang } d = \frac{\beta_n - \beta_m}{\cos B}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Werte für die den  $q$  entsprechenden Bogen:

$$d_1 = 5^\circ 25' \quad d_2 = 8^\circ 1' \quad d_3 = 2^\circ 36'.$$

Die entsprechenden Kreismaße und die Werte von  $q$  sind:

$$\begin{array}{lll} d_1 = 0.094 & d_2 = 0.14 & d_3 = 0.045 \\ q_1 = 3.72 & q_2 = 7.12 & q_3 = 1.77 . \end{array}$$

Man wird in diesem Falle wohl kaum behaupten wollen, dass die  $q$  und  $d$  von derselben Größenordnung sind, obwohl dies theoretisch aus den Formeln zu schliessen ist. Setzt man nun die Rechnung fort, so ergibt sich weiter:

$$\begin{array}{lll} \log \gamma = 3.612572 & \log W_2 = 9.114658 - 10 & \log G_1 = 28^\circ 55' 46''.2 \\ \log \Theta_1 = 8.536198 - 10 & \log \Theta_2 = 8.709724 - 10 & \log \Theta_3 = 8.227427 - 10 \\ \log \mu_1 = 6.381878 - 10 & \log \mu_3 = 6.591422 - 10 & \log(\mu_3 - \mu_1) = 6.174350 - 10 \\ \log \cos \psi_2 = 9.943916 - 10 & \log B_2 = 9.680912 - 10 & \log f_2 = 9.946225 - 10. \end{array}$$

Als Anfangswert für  $\log r_2$  wurde der aus der Rechnung nach der Olbers'schen Methode resultierende Wert gewählt, nämlich:

$$\log r_a = 9.753071.$$

Hieraus ergab sich nach den Formeln IV:

$$\log e_2 = 9.770652 \quad \log r_e = 9.750102.$$

Der Anfangswert wurde dann nach der oben, Seite 7, abgeleiteten Formel 6) verbessert, und stimmten bereits im nächsten Versuche Ausgangs- und Endwert bis auf 3 Einheiten der sechsten Decimale überein. Die Endwerte sind:

$$\log r_2 = 9.756028 \quad \log e_2 = 9.759812.$$

Ferner hat man nach V:

$$\log T = 2_n 115184; [\log \varrho_1]_w = 9.764627; [\log \varrho_3]_w = 9.753279,$$

also auch

$$[\log M]_w = 9.988652.$$

Vergleicht man diese Werte mit den nach der Olbers'schen Methode berechneten, so ergeben sich folgende Unterschiede, im Sinne Olbers-Weiss:

$$\Delta \log \varrho_1 = 0.004478; \Delta \log \varrho_3 = 0.004836; \Delta \log M = 0.000358.$$

Der Unterschied in  $\log M$  ist zwar geringfügig, doch weichen die  $\log \varrho$  beträchtlich mehr von einander ab. Es könnte nun eine Meinungsverschiedenheit bestehen über die Bedeutung der Abweichung in den  $\log \varrho$ , soviel jedoch steht fest — und darauf kommt es augenblicklich nur an — dass die Olbers'sche Methode in diesem Falle die genaueren Resultate geliefert hat und, wie aus dem Vorgehenden ersichtlich ist, hätten die besonderen Umstände, warum dies der Fall ist, gleich im Anfang festgestellt werden können. Es soll jedoch durchaus nicht behauptet werden, dass es nicht auch Fälle giebt, in denen die Methode von Weiss jeder anderen vorzuziehen ist. Auch hier finden wir also wieder die Notwendigkeit eines eingehenden Studiums und einer Klassifikation aller die Genauigkeit einer Methode entscheidenden Vorbedingungen, sowie von Formeln, aus denen man den Einfluss einer Änderung in den  $\varrho$  auf die Elemente beurteilen kann. Was das obige Beispiel anbetrifft, so wäre das Resultat für die Weiss'sche Methode noch ungünstiger ausgefallen, wenn  $\log \sin(Q_3 - Q_1)$  nicht so sorgfältig berechnet worden wäre und wenn, wie Weiss vorschlägt, die in diesem Falle etwas beträchtlichen Reductionen auf den locus fictus nicht angebracht worden wären.

Aber die Genauigkeit des Resultates hängt nicht ausschliesslich von der Wahl der für die gegebenen Bedingungen geeignetsten Methode ab, sondern sie kann unter Umständen auch beträchtlich durch Unvorsichtigkeit in der Auswahl der mitzunehmenden oder zu vernachlässigenden kleinen Korrektionsgrößen beeinflusst werden. Viele Astronomen sind der Ansicht, dass in ersten Bahnen höchstens die Aberration im Laufe der Rechnung berücksichtigt werden solle, dass hingegen die Parallaxe des Himmelskörpers etc. etc. zu vernachlässigen sei, trotzdem in vielen Fällen durch die Einführung des sogenannten locus fictus ein einfaches Verfahren zur Elimination derselben gegeben ist. Auch Weiss sagt auf Seite 30 seiner Abhandlung, er nähme als selbstverständlich an, dass man bei einer ersten Bahnbestimmung nicht eine übertriebene, übrigens auch ganz nutzlose Genauigkeit, etwa durch . . ., Einführung des locus fictus, etc. anstrebe. Es können jedoch Fälle vorkommen, wo die Reduction auf den locus fictus eine bedeutende Rolle spielt. Die Formeln, deren man sich dabei zu bedienen hat, sind bekanntlich (siehe Oppolzer, Bd. I, Seite 661):

$$\left. \begin{array}{l} \text{Korrektion der} \\ \text{Sonnenlänge} \end{array} \right\} = \cot \beta \left[ B - \frac{h\pi}{R_0} \sin b \right] \sin(L_0 - \lambda) + \frac{h\pi}{R_0} \cos b \sin(L_0 - l)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Korrektion von} \\ \log R_0 \end{array} \right\} = M \cot \beta \left[ B - \frac{h\pi}{R_0} \sin b \right] \cos(L_0 - \lambda) + \frac{h\pi}{R_0} \cos b \cos(L_0 - l),$$

wo  $\pi = 8''.848$ ,  $\log \pi = 0.9468$ ,  $\log M = 1.3234$ ,

und wo  $h$ ,  $b$  und  $l$  die auf den Erdmittelpunkt und auf die Ekliptik bezogenen Koordinaten des Beobachters sind. Man wendet diese Formeln nur an, wenn die Breiten  $> 1^\circ$  sind. Sind dieselben nur wenig gröfser als  $1^\circ$ , so kann das mit  $\cot \beta$  multiplizierte Glied der Korrektion der Länge und des  $\log R_0$  leicht bedeutende Werte erhalten, selbst wenn man  $B = 0$  setzt, was für den vorliegenden Zweck nicht in Betracht kommt. So hatten diese Korrektionen für den Kometen 1895 (Swift) folgende Werte, wobei die Beobachtungszeiten auf den Meridian von Berlin bezogen sind:

1894 Aug. 21.849919	$\Delta L_0 = - 1' 50''.6$	$\Delta \log R_0 = + .000266$
22.845023	- 2 1 .4	.000297
23.838924	- 2 13 .3	.000461.

Die dazu gehörigen Längen und Breiten des Kometen waren:

$\lambda = 9^\circ 8' 44''.8$	$\beta = + 2^\circ 11' 35''.4$
9 43 9 .5	2 2 16 .4
10 16 54 .2	1 53 16 .3

Wechselt außerdem die Breite das Zeichen zwischen der ersten und dritten Beobachtung, so wird auch das Zeichen der an die erste und dritte Sonnenlänge anzubringenden Korrektionen wechseln. Der Unterschied in  $L_3 - L_1$  wird daher gleich der Summe der absoluten Werte der Korrektionen von  $L_1$  und  $L_3$  sein. Ist diese Summe etwa  $4'$  und ist die Bahn mit einfägigen Zwischenzeiten zu berechnen, so dass der von der Sonne beschriebene Bogen etwa  $2^\circ$  ist, so beträgt die durch die Reduktion auf den locus fictus bedingte Änderung in  $\log \sin(L_3 - L_1)$  bereits ein bis zwei Einheiten der zweiten Decimale. Dementsprechend leidet die Genauigkeit von  $g$  und  $G$  (Methode von Olbers und Oppolzer) und aller daraus abgeleiteten Gröfßen. Aber auch die Korrektionen von  $\log R_1$  und  $\log R_3$  wechseln das Zeichen in diesem Falle, was um so bedenklicher ist, als dadurch der Fehler aufhört, ein systematischer der Längeneinheit zu sein. Durch die Reduktion auf den locus fictus wird im allgemeinen das Verhältnis der geozentrischen Distanzen ( $M$ ) nicht wesentlich beeinflusst, aber der absolute Betrag derselben. Der in solchem Falle am Schluss der Rechnung aus den Elementen zur Probe abgeleitete Wert von  $M$ ,

würde mit dem ursprünglichen fast vollständig übereinstimmen, die Darstellung des mittleren Ortes dürfte eine vollständig befriedigende sein, und trotzdem würden die Beobachtungen bald von der Ephemeride stark abweichen, und somit würde das Resultat auch nicht das beste sein, das aus dem vorgelegten Material hätte erreicht werden können. Die Ursache dieser Erscheinung wird dann wohl wiederum ausschließlich in dem kleinen geocentrischen Bogen und der Ungenauigkeit der zu Grunde gelegten Beobachtungen gesucht. Es tritt also auch hier wiederum die Notwendigkeit zu Tage, nicht mechanisch nach einem gewissen Systeme rechnen zu wollen, z. B. stets nach ein und derselben Methode und mit Vernachlässigung aller Korrekturen, sondern der Rechner muss bestrebt sein, gleich am Anfang einen klaren Überblick über die in seinem speciellen Falle obwaltenden Umstände zu gewinnen und danach seinen Weg wählen. Es steht zu erwarten, dass, wenn Anfänger sich schon bei ersten Bahnbestimmungen hieran gewöhnen, ihnen derartige Überlegungen auch später in schwierigeren Problemen leichter fallen werden. Zur weiteren Erläuterung der hier in Bezug auf die Reduktion auf den locus fictus ausgesprochenen Ansichten, mögen noch einige Differentialformeln hier Platz finden, aus denen für die Methoden von Olbers und von Oppolzer der Einfluss der hier in Betracht kommenden Korrekturen auf  $M$  etc. ersehen werden kann. Die Formel, welche zur Bestimmung von  $M$  in der Methode von Olbers dient, ist (siehe Oppolzer I, Seite 665):

$$M = c \frac{Z}{N},$$

wo:

$$c = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}; \quad Z = \sin \beta_1 \frac{\sin(\lambda_2 - L_2)}{\tan \beta_2} - \sin(\lambda_1 - L_2) \cos \beta_1;$$

$$N = \sin(\lambda_3 - L_2) \cos \beta_3 - \sin \beta_3 \frac{\sin(\lambda_2 - L_2)}{\tan \beta_2}$$

ist.

Durch Differentiation erhält man also nach einigen Transformationen:

$$dM = -c \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_3}{\tan \beta_2} [\tan \beta_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) - \tan \beta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)] \frac{dL_2}{N^2}.$$

Die eckige Klammer ist proportional der in den allgemeinen Fundamentalgleichungen als Coefficienten von  $e_1, e_2, e_3$  auftretenden GröÙe  $K$ , wie sie von Oppolzer, Seite 353, definiert wird und identisch mit der Form, in welcher Weiss, Seite 4 seiner Abhandlung, die GröÙe definiert. Adoptieren wir die letztere Definition, so kann man auch schreiben:

$$dM = -c \frac{\cos \beta_1 \cos \beta_3}{\tan \beta_2} \frac{K}{N^2} dL_2 \sin 1''. \quad (7)$$



$K$  ist theoretisch im allgemeinen von der dritten Ordnung,  $N$  hingegen von der ersten. Unter normalen Verhältnissen ist also die in  $M$  bedingte Änderung gleich derjenigen in  $L_3$ , multipliziert bei einer Größe erster Ordnung, ist also kaum von Belang. Noch günstiger werden die Verhältnisse, wenn  $K$  sehr klein ist, die Beobachtungen also sehr nahe in einem größten Kreise liegen (der aber in der Methode von Olbers nicht durch den mittleren Sonnenort gehen darf), und wenn  $\beta_3$  sehr klein wird, da dadurch  $N$  vergrößert wird. Die erstere Bedingung tritt bei sehr kleinen Zwischenzeiten fast immer ein. In dem auf Seite 8 angeführten Beispiel war  $\log K = 6.1616 - 10$ . Definierte man hierdurch die ungefähre Größe dritter Ordnung in diesem Beispiel, so ergäbe sich für  $\log k$ , die Größe erster Ordnung, der dritte Teil dieses Logarithmus, oder  $\log k = 8.72 \dots - 10$ , was eine gute Uebereinstimmung mit einer praktisch als Größe erster Ordnung zu bezeichnenden Zahl ist. Dagegen ist  $\log N = 0.2424$  wegen der geringen Breite, die theoretische Größenordnung ist also hier hinfällig, jedoch bleibt durch den hohen Wert von  $N$  die in diesem Falle etwa  $51''$  betragende Korrection der Sonnenlänge auf den Wert von  $M$  ohne Einfluss, denn berechnet man die Änderung in  $M$  nach 7), so ergibt sich  $dM = 0.000001$ . Es ist ein günstiger Umstand, dass, wenn die Änderung der Sonnenlänge wegen kleiner Breite groß wird, der Einfluss auf  $M$  durch den gleichzeitig hohen Wert von  $N$  abgeschwächt wird.

Was nun den Einfluss der Reduction auf den locus fictus auf die absoluten Werte von  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  anbetrifft, so erhält man zunächst durch Differentiation des Ausdrucks für die Sehne  $g$  zwischen den beiden Sonnenorten:

$$g^2 = R_3^2 + R_1^2 - 2R_1 R_3 \cos(L_3 - L_1)$$

$$g dg = (R_3 dR_3 + R_1 dR_1) - \cos(L_3 - L_1) (R_3 dR_1 + R_1 dR_3) + R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1) d(L_3 - L_1).$$

Die beiden ersten Glieder heben sich teilweise auf, das dritte Glied kommt besonders in Betracht, wenn die Korrectionen von  $L_1$  und  $L_3$  verschiedenes Vorzeichen haben.

Der Koeffizient von  $d(L_3 - L_1)$ , nämlich  $\frac{R_1 R_3}{g} \sin(L_3 - L_1)$  ist stets nahezu der Einheit gleich. Beträgt  $d(L_3 - L_1)$  etwa  $4'$ , so ist der davon abhängige Teil der Änderung in  $g$ :

$$4' \sin 1'' = 001 \dots$$

Für eintägige Zwischenzeiten ist nun  $g$  etwa gleich  $.03 \dots$ , so dass die Änderung in  $g$  etwa den 30. Teil des ganzen Wertes betrüge. In den Hilfsgrößen  $A, f_1, f_3$  wird diese Änderung noch durch Größen erster Ordnung (theoretisch) dividiert, nämlich durch  $\tau$  und  $h$ . Für das Intervall von 2 Tagen ist  $\tau = .067$ , so dass die Änderung in  $g$  fünfzehnmal vergrößert in  $A$  auftritt und etwa gleich  $.015$  ist. Der Einfluss der Korrectionen ist also bereits in die zweite Dezimale gedrungen und ähnlich ist es mit den  $f$ , die direkt auf die Werte der  $\varrho$  führen. Es scheint

also hiermit erwiesen, dass Umstände eintreten können, durch die in der Methode von Olbers die absoluten Werte der  $\varrho$  beeinträchtigt werden, und wird sich dies in der Ephemeride fühlbar machen, selbst wenn die Darstellung des mittleren Ortes eine befriedigende ist.

In der Methode von Oppolzer ist  $M$  ganz unabhängig von der Reduktion auf den locus fictus,  $m$  leidet besonders, wenn die heliozentrischen Distanzen sehr klein sind, und über die absoluten Werte der  $\varrho$  lässt sich Ähnliches sagen, wie in der Methode von Olbers.

Die hier angestellten Betrachtungen haben die Notwendigkeit eines eingehenden Studiums und einer Klassifizierung der den verschiedenen Methoden erster Bahnbestimmung innewohnenden Genauigkeitsmomente mit Rücksicht auf die durch das zu Grunde gelegte Material gestellten Bedingungen dargelegt. Der Rechner wird durch Inspektion der aus einer solchen Untersuchung resultierenden Kriterien in den Stand gesetzt sein, den richtigen Weg zu finden, um das beste Resultat mit dem geringsten Aufwand von Mühe zu erzielen. Ich behalte mir den Versuch einer derartigen Zusammenstellung noch vor. Es unterliegt keinem Zweifel, dass man, wenn man gleich am Anfang einen klaren Überblick über die in dem speziellen Falle obwaltenden Umstände zu gewinnen sucht, viel seltener genötigt sein wird, eine Verbesserung des ursprünglichen Wertes von  $M$  vorzunehmen, und überhaupt viel bessere Resultate erzielen wird. In 12 ersten Bahnbestimmungen, die der Verfasser soweit unternommen hat, führte fast jedesmal bereits die erste Annahme von  $M$  zu einem befriedigenden Resultate und wurden Verbesserungen nie vorgenommen.

## § 2.

Ein zweiter Übelstand in der ersten Bahnbestimmung ist, dass man nicht genau bestimmen kann, wie genau die Werte von  $M$ ,  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  sein müssen, um ein befriedigendes Resultat zu erzielen, da es noch an Formeln fehlt, aus denen der Einfluss einer Änderung in diesen Größen auf die Elemente und den mittleren Ort erkannt werden kann. Die Meinungen darüber gehen auseinander. So ist (nach Weiss, Seite 24 seiner Abhandlung) Clausen in die Täuschung verfallen, dass bei der Berechnung einer Bahn nach Olbers' Methode ein in  $M$  begangener Fehler sehr vergrößert auf die geocentrischen Distanzen und damit auf die Elemente übergeht, mit anderen Worten, dass:

$$\frac{d\varrho}{dM} \text{ oder auch } \frac{d \log \varrho}{d \log M}$$

eine Gröfse von der Ordnung — 1 sei. Als Entgegnung führt Weiss eine Auswertung dieses letzteren Differentialquotienten für den Komet 1845 I von Encke an, wonach derselbe gleich 2.0 ist und vertritt dann die Ansicht, dass der Satz von Clausen in der Allgemeinheit, wie er ausgesprochen wird, irrig ist und auf Spezial-

fälle beschränkt werden muss, und diese Ansicht dürfte sich bestätigen, wenn man die von Oppolzer aufgestellte Formel zur Berechnung der durch eine Änderung in  $M$  bedingten Correction von  $\varrho_1$  etwas näher betrachtet (Bahnbest. I, Seite 303).

Dieselbe lautet:

$$P = \frac{\varrho_1}{s} \{g \cos \beta_3 \cos (G - \lambda_3) - \varrho_1 [h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) \cos \beta_3 + h \sin \zeta \sin \beta_3]\}$$

$$d\varrho_1 = \frac{P - \varrho_1 \sin \Theta_3 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma}{h \sin \vartheta + (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma} dM. \quad 8)$$

Zunächst sei darauf aufmerksam gemacht, dass aufser  $s$ ,  $g$  und  $\operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma$  auch  $h$  theoretisch von der ersten Ordnung ist. Denn bezeichnet man den geocentrischen Bogen zwischen dem ersten und dritten Ort mit  $\alpha$ , so ist (siehe auch Opp. Bahn. I, Seite 302):

$$h^2 = 1 + M^2 - 2M \cos \alpha = (M - 1)^2 + \sin^2 \alpha, \quad 9)$$

wenn  $\sin \frac{1}{2} \alpha = \frac{1}{2} \sin \alpha$  gesetzt wird. Da nun  $\alpha$  die geocentrische Bewegung ist und  $M$  bei kurzen Zwischenzeiten von der Einheit theoretisch nur um eine Gröfse erster Ordnung abweicht, so ist auch  $h$  theoretisch von der ersten Ordnung.  $P$  wäre daher nullter Ordnung und  $\frac{d\varrho_1}{dM}$  von der Ordnung  $-1$ , wenn man nicht in jedem Falle mit besonderen Umständen zu rechnen hätte. So kann z. B. die Differenz in dem Ausdruck für  $P$  sehr gering werden, wodurch, namentlich bei kleinem  $\varrho_1$  etc.,  $P$  selbst verhältnismäfsig unbedeutend werden würde. Ist dann zu gleicher Zeit die Bewegung des Kometen am Himmel und in der Gesichtslinie grofs, so wird  $\frac{d\varrho_1}{dM}$  sogar beträchtlich kleiner als die Einheit ausfallen. Auch in dem Rechenbeispiel, das Oppolzer zur Erläuterung der Formeln 8) in seinem Lehrbuch giebt (Seite 324), ist:

$$\log \frac{d\varrho_1}{dM} = 9,86886; \quad \frac{d\varrho_1}{dM} = 0,74 \dots; \quad \frac{d \log \varrho_1}{d \log M} = 3,0.$$

Auf der andern Seite bieten die auf Seite 10 angeführten Zahlen ein Beispiel für den Fall, wo eine Änderung in  $M$ , um etwa das 13fache vergrößert in  $\varrho_1$  auftritt. Freilich rühren die beiden Werte von  $M$  aus verschiedenen Methoden her.

Was also die Methoden von Olbers und Oppolzer anbetrifft, kann der Einfluss einer Änderung in  $M$  auf  $\varrho_1$  aus 8) nur mit Rücksicht auf die speziellen Werte von  $P$ ,  $h \sin \vartheta$  etc. abgeschätzt werden. Bei der grofsen Bequemlichkeit, mit

welcher diese Werte im Laufe der Rechnung festgestellt werden können und bei der Wichtigkeit derselben für die Beurteilung der zu erwartenden Genauigkeit der Elemente, speziell wenn man außer der Formel 8) noch die im nächsten Kapitel abzuleitenden Differentialformeln heranzieht, sollte niemand die kleine Mühe ihrer Berechnung scheuen.

In einer im Jahre 1885 erschienenen kleinen Schrift\*) hat nun Weiss ein äußerst scharfsinniges Verfahren angegeben, um sich genäherte Werte von  $M$  zu verschaffen, eventuell unter Anwendung des Lambert'schen Kriteriums. Seiner Ansicht nach wird man beim Rechnen nach seinen Vorschriften kaum je nötig haben, eine Verbesserung des Wertes von  $M$  vornehmen zu müssen. Zur Erläuterung seines Verfahrens berechnet Weiss den Wert von  $M$  für drei Kometen, für welche der Ausnahmefall eintritt, und erhält für  $\log M$ :

1) 9.985 793                      2) 0.027 313                      3) 9.991 298,

während die genaueren nach Oppolzer's Methode berechneten Werte sind:

1) 9.990 813                      2) 0.033 053                      3) 9.990 085,

so dass die Unterschiede im Sinne Weiss-Oppolzer betragen:

1)  $- 0.005\ 020$                       2)  $- 0.005\ 740$                       3)  $+ 0.001\ 213$ .

Da nun Weiss erklärt, dass die von ihm berechneten Werte für eine erste Bahnbestimmung vollständig befriedigend sind, so könnte man den Schluss ziehen, dass Unterschiede wie die obigen nicht von Belang sind. Der Einfluss dieser Unterschiede auf die Elemente und den mittleren Ort wird von Weiss in seiner Schrift nicht weiter verfolgt, und so lange nach 8) die Möglichkeit vorhanden ist, dass dieselben beträchtlich vergrößert in  $q_1$  auftreten können, wird man gerechtfertigt sein, Bedenken über die Zulässigkeit derartiger Unterschiede zu tragen. Es tritt daher die Notwendigkeit an uns heran, Formeln zu besitzen, aus denen der Einfluss von Änderungen in  $q_1$ ,  $q_3$  und  $M$  auf die Elemente etc. mit leichter Mühe zu erkennen ist. Ein Versuch, solche Formeln aufzustellen, ist im nächsten Kapitel gemacht worden.

Leider sind nun von Weiss für seine drei Beispiele nicht die nötigen Zahlen angegeben, aus denen man, ohne sich vorher die Mühe der Ableitung der Elemente zu machen, mit Hilfe unserer Formeln die Änderungen in den Elementen berechnen könnte. Für den ersten Fall lassen sich jedoch die nötigen Werte aus Oppolzer's Lehrbuch entnehmen (Komet 1869 III, Seite 329 et sequ.) Aus den Formeln 8) ergibt sich zunächst:

---

\*) Prof. Dr. E. Weiss, Über die Bestimmung von  $M$  bei Olbers' Methode der Bahnbestimmung mit besonderer Rücksicht auf den Ausnahmefall. Sitzb. der Kais. Akad. d. Wissensch. II. Abt. Dec.-Heft. Jahrg. 1885.

$$\frac{dq_1}{dM} = 0.75, \quad \frac{d \log q_1}{d \log M} = 2.2.$$

Es ist ferner:

$$d \log M = -0.00502, \quad d \log q_1 = -0.01090, \quad d \log q_3 = -0.01592.$$

Durch Anwendung unserer Formel II des nächsten Kapitels findet man für den von  $d \log M$  herrührenden Hauptteil der Änderung in  $\Omega$ , welche mit  $\Delta \Omega_M$  bezeichnet werden möge:

$$\Delta \Omega_M = 1^\circ.1.$$

Dass sich ein solcher Unterschied im allgemeinen in der Darstellung des mittleren Ortes und besonders in der Ephemeride bemerkbar machen wird, steht nach unseren Formeln außer Frage. Übrigens werden wir später sehen, dass  $\omega$  und  $T$  gewöhnlich am meisten beeinträchtigt werden.

Erklärt man nun mit Weiss die hier erreichte Genauigkeit für befriedigend, so hat man aus dem gegebenen Material nicht das beste Resultat gezogen, was man mit wenig mehr Mühe hätte thun können, ohne dass die erste Annahme von  $\log M$  hätte verbessert werden müssen. Unternimmt man aber auf Grund der von Weiss erreichten ersten Annäherung eine zweite Approximation, so verliert das ganze Verfahren an Einfachheit und der von Weiss gerühmte Vorzug, dass zweite Annäherungen kaum je nötig seien, fällt weg.

Die Neurechnung des Wertes von  $M$ , die entweder erst nach der Berechnung des mittleren Ortes vorgenommen wird, oder öfters auch schon früher, wenn man berechtigte Zweifel an seiner Genauigkeit zu haben glaubt, führt unter Umständen nicht zur vollständigen Elimination von Fehlern in dem absoluten Werte der  $q$ . Im allgemeinen werden ja derartige Fehler nicht zu befürchten sein, da, sobald der genaue Wert von  $M$  eingeführt ist, die Rechnung auf lauter festen Werten beruht. Wie bereits früher erwähnt worden ist, kann dies jedoch eintreten in den Fällen, wo die Reduktion auf den locus fictus notwendig war, aber vernachlässigt worden ist.

Jedenfalls wird es sich empfehlen, — schon wegen der dadurch erreichbaren Symmetrie der Form — in den nun folgenden Differentialformeln die Änderungen in den Elementen von  $d \log q_1$  und  $d \log q_3$  abhängig zu machen. Durch Einsetzung von

$$d \log q_3 = d \log q_1 + d \log M$$

können dieselben dann stets, wenn es beliebt, auf  $d \log q_1$  und  $d \log M$  bezogen werden.

Es wird sich herausstellen, dass diese Formeln auch sehr bequem zur Verbesserung der Elemente angewendet werden können.

## II. Die differentiellen Verhältnisse der Änderungen in den Elementen zu denjenigen in $e_1$ und $e_3$ .

### § 1. Ableitung der Formeln.

Es soll nun angenommen werden, dass man sich mit Hilfe irgend einer der zur Bestimmung von ersten parabolischen Bahnen anwendbaren Methoden Näherungswerte für  $e_1$  und  $e_3$  verschafft hat, und dass die Elemente und der mittlere Ort, welche auf Grund dieser ersten Annahmen berechnet worden sind, nicht befriedigend sind. Ferner seien  $\Delta e_1$  und  $\Delta e_3$  die Änderungen, welche einer Änderung  $\Delta M$  in  $M$  genau entsprechen. Durch Anwendung der Taylor'schen Reihe kann man dann die in den Elementen und in der Darstellung des mittleren Ortes durch die Incremente  $\Delta e_1$  und  $\Delta e_3$  bedingten Korrekturen mehr oder weniger genau darstellen, je nach der Zahl der mitgenommenen Glieder. Es soll jedoch zunächst nur die Bestimmung der linearen Verhältnisse dieser Änderungen vorgenommen werden, während die Differentialquotienten zweiter Ordnung später getrennt abgeleitet werden sollen, da dadurch eine klarere Übersicht der Entwicklungen erreicht wird. Wie bereits oben erwähnt (Seite 17) wird es möglich sein, sehr bequeme Differentialformeln zur Korrektur der Elemente aufzustellen, und in vielen Fällen wird die Anwendung derselben der direkten Neurechnung der Elemente vorzuziehen sein. Es sind hier jedoch auch noch einige andere Formeln aufgenommen worden, welche von Wichtigkeit sind für die Beurteilung der Genauigkeitsgrenze, welche man sich zwecks befriedigender Darstellung des mittleren Ortes in den endgültigen Annahmen von  $e_1$  und  $e_3$  zu setzen hat.

Differentiiert man die Formeln, welche zur Berechnung der heliozentrischen Koordinaten eines Himmelskörpers aus den geozentrischen dienen, so erhält man:

$$\left. \begin{aligned} -r \cos b \sin(l-L) dl - r \sin b \cos(l-L) db + \cos b \cos(l-L) dr &= \cos \beta \cos(\lambda-L) dq \\ + r \cos b \cos(l-L) dl - r \sin b \sin(l-L) db + \cos b \sin(l-L) dr &= \cos \beta \sin(\lambda-L) dq \\ + r \cos b db + \sin b dr &= \sin \beta dq \end{aligned} \right\} 1)$$

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit  $-\sin(l-L)$ , die zweite mit  $+\cos(l-L)$  und addiert dieselben dann, so ist:

$$r \cos b dl = \cos \beta \sin (\lambda - l) dq. \quad 2)$$

Multipliziert man dagegen die erste mit  $\cos (l - L)$ , die zweite mit  $\sin (l - L)$  und addiert die Produkte, so ergibt sich:

$$-r \sin b db + \cos b dr = \cos \beta \cos (\lambda - l) dq. \quad 3)$$

Addiert man nun die dritte der Gleichungen 1) zu der Gleichung 3) einmal, nachdem erstere mit  $\sin b$ , letztere mit  $\cos b$ , sodann, nachdem erstere mit  $\cos b$ , letztere mit  $-\sin b$  multipliziert worden ist, so entstehen die Gleichungen:

$$\left. \begin{aligned} dr &= \{ \sin b \sin \beta + \cos b \cos \beta \cos (\lambda - l) \} dq \\ r db &= \{ \cos b \sin \beta - \sin b \cos \beta \cos (\lambda - l) \} dq \end{aligned} \right\} 4)$$

Die Gleichungen 2), 3) und 4) dienen dazu, die von der ersten Potenz einer Änderung in  $q$  bedingten Korrekturen in den zugehörigen heliozentrischen Koordinaten zu ermitteln. Dabei haben die Koeffizienten von  $dq$  eine einfache trigonometrische Bedeutung. Denkt man sich nämlich den Himmelskörper als Anfangspunkt eines sphärischen Koordinatensystems mit der Fundamentalebene parallel der Ekliptik, so sind die Koordinaten der Sonne und der Erde beziehungsweise  $\pm 180^\circ + l$ ,  $-b$  und  $\pm 180^\circ + \lambda$ ,  $-\beta$ . Bezeichnet man nun in dem sphärischen Dreiecke, das von Sonne, Erde und dem Pole der Ekliptik gebildet wird, den Winkel an der Sonne mit dem Symbol  $\odot$  und den Bogen zwischen Sonne und Erde mit  $90^\circ - \Theta$ , so ergibt sich sofort mit Rücksicht auf die Gleichungen 2), 3) und 4):

$$\left. \begin{aligned} r \cos b dl &= -\cos \Theta \sin \odot dq, & r db &= -\cos \Theta \cos \odot dq \\ dr &= \sin \Theta dq. \end{aligned} \right\} 5)$$

Der Bogen  $\Theta$  ist daher das Maß des in den Versuchen zur Lösung von  $(r_1 + r_3)$  eingeführten Hilfswinkels  $\Theta$ , welcher durch die Relation:

$$\text{tang } \Theta = \frac{q - R \cos \psi}{R \sin \psi} \quad 6)$$

definiert ist. Dies ist auch unmittelbar ersichtlich aus dem ebenen Dreieck, das von Sonne, Erde und Himmelskörper gebildet wird; denn bezeichnet man in demselben den Winkel am Himmelskörper wiederum mit  $90^\circ - \Theta$ , so ist, wenn man das Perpendikel von der Sonne auf  $q$  fällt, und da  $\psi$  der Winkel an der Erde ist:

$$r \sin \Theta = q - R \cos \psi, \quad r \cos \Theta = R \sin \psi, \quad 7)$$

und der Winkel an der Sonne ist  $90 - (\psi - \Theta)$ . Dasselbe Dreieck liefert nach dem Sinussatze:

$$\frac{\sin \psi}{r} = \frac{\cos \Theta}{R} = \frac{\cos (\psi - \Theta)}{e}, \quad 8)$$

und ähnlich der ersten Relation in 7), wenn man auch die anderen beiden Perpendikel fällt:

$$R \sin (\psi - \Theta) = r - e \sin \Theta; \quad e \cos \psi = R - r \sin (\psi - \Theta). \quad 9)$$

Diese Beziehungen werden später Verwendung finden. Da nun die heliozentrischen und geozentrischen Koordinaten des Himmelskörpers durch vorherige Rechnung genähert bekannt sind, so lassen sich die Koeffizienten von  $d\varrho$ , in Gleichungen 2), 3) und 4) leicht berechnen. Setzt man nämlich:

$$\left. \begin{array}{l} q' \sin Q' = \sin \beta, \quad q' \cos Q' = \cos \beta \cos (\lambda - l) \\ r \cos b \, dl = \cos \beta \sin (\lambda - l) \, d\varrho, \quad r \, db = q' \sin (Q' - b) \, d\varrho \\ dr = q' \cos (Q' - b) \, d\varrho. \end{array} \right\} 10)$$

Es werden sich jedoch noch bedeutend bequemere Formeln zur Berechnung von  $dl$ ,  $db$ , und  $dr$  aufstellen lassen und soll dies zunächst mit Hülfe der Figur vorgenommen werden. Um dieselbe zu bilden, denke man sich die Ebene des von Sonne, Erde und Himmelskörper gebildeten Dreiecks bis zum Durchschnitt mit der Himmelskugel ausgedehnt, wobei natürlich das Dreieck selbst im Vergleich zu einem größten Kreise der Himmelskugel als verschwindend klein anzunehmen ist. In dieser Ebene seien dann durch irgend einen Punkt des Dreiecks, der als Anfangspunkt dienen soll, Durchmesser gelegt, welche parallel den drei Seiten des Dreiecks verlaufen und welche die Himmelskugel in sechs Punkten schneiden, welche mit den Doppel-Symbolen:

$$\textcircled{\textcircled{\delta}}, \quad \textcircled{\delta}, \quad \delta\textcircled{\textcircled{\gamma}}, \quad \textcircled{\delta\textcircled{\gamma}}, \quad \textcircled{\textcircled{\gamma}}, \quad \delta\textcircled{\gamma}$$

bezeichnet werden sollen. Der Punkt  $\textcircled{\textcircled{\delta}}$  ist dann der Ort des Himmelskörpers von der Erde aus gesehen. Im allgemeinen bezeichnet also der obere Teil des Doppel-Symbols den projicierten Körper, während das angehängte Symbol Aufklärung darüber giebt, von welchem der anderen beiden Körper aus die Projektion stattfindet. Wählt man nun die Ekliptik als Fundamentalebene und legt noch größte Kreise durch den Pol der Ekliptik ( $E$ ) und die drei oben erwähnten Durchmesser, so ist zunächst leicht ersichtlich, dass das sphärische Dreieck  $E \delta\textcircled{\textcircled{\gamma}} \textcircled{\delta\textcircled{\gamma}}$  mit dem auf Seite 19, Zeile 16 erwähnten Dreieck identisch ist. Der sphärische Winkel am Punkte  $\textcircled{\delta\textcircled{\gamma}}$  wurde bereits früher mit dem Symbol  $\textcircled{\gamma}$  und der Bogen  $\delta\textcircled{\textcircled{\gamma}} \textcircled{\delta\textcircled{\gamma}}$  mit  $90 - \Theta$  bezeichnet. Der dritte Winkel des Dreiecks ist gleich  $(l - \lambda)$  und die beiden anderen Bogen beziehungsweise  $90^\circ + \beta$  und  $90^\circ + b$ . Ferner ist in dem Dreieck  $F \textcircled{\textcircled{\delta}} \textcircled{\delta}$ , das von der Ekliptik, dem



durch die drei Körper gelegten Kreise und dem durch den Durchmesser  $\delta\mathfrak{W}\mathfrak{O}_\delta$  laufenden Nebenkreise begrenzt wird,

Bogen  $\mathfrak{W}_\delta \odot_\delta = \psi$ , Bogen  $\mathfrak{W}_\delta F = \beta$ , Bogen  $\odot_\delta \mathfrak{W}_\delta = \lambda - L$ , Winkel  $\mathfrak{W}_\delta \odot_\delta F = P$ ,

wo  $P$  der bekannte zur Berechnung von  $\psi$  eingeführte Hülfswinkel ist.

Endlich soll noch das Dreieck  $E \odot \mathfrak{W} \odot_\delta$  betrachtet werden. Es ist:

$$\begin{aligned} \odot \mathfrak{W} \odot_\delta &= 90^\circ - (\psi - \Theta), \quad \odot \mathfrak{W} E = 90^\circ + b, \quad \odot_\delta E = 90^\circ, \\ E \odot \mathfrak{W} \odot_\delta &= 180^\circ - \odot, \quad \odot \mathfrak{W} \odot_\delta E = 90^\circ + P, \quad \odot_\delta E \odot \mathfrak{W} = 180^\circ - (l - L). \end{aligned}$$

Es lassen sich also folgende Relationen aufstellen, zunächst nach dem Sinussatze:

$$\sin \odot = \frac{\sin (l - L)}{\cos (\psi - \Theta)} = \frac{\cos P}{\cos b}. \quad 11)$$

Ferner ist:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\sin b \sin (\psi - \Theta) - \cos b \cos (\psi - \Theta) \cos \odot & \text{a)} \\ -\cos (l - L) &= \cos b \sin (\psi - \Theta) - \sin b \cos (\psi - \Theta) \cos \odot & \text{b)} \\ -\sin P &= -\sin b \cos (\psi - \Theta) + \cos b \sin (\psi - \Theta) \cos \odot & \text{c)} \\ \sin (\psi - \Theta) &= -\cos b \cos (l - L) & \text{d)} \\ -\cos (\psi - \Theta) \sin P &= -\sin b & \text{e)} \\ \cos (\psi - \Theta) \cos \odot &= \sin b \cos (l - L) & \text{f)} \\ -\sin (\psi - \Theta) \sin P &= \cos b \cos \odot & \text{g)} \end{aligned} \right\} 12)$$

Aus 12a) oder auch aus 12d) und 12f) folgt:

$$\cos \odot = -\operatorname{tang} b \operatorname{tang} (\psi - \Theta).$$

Ferner war:

$$\sin \odot = \frac{\cos P}{\cos b}.$$

Es ist daher mit Rücksicht auf 5):

$$r \cos^2 b \, dl = -\cos \Theta \cos P \, d\varrho, \quad \text{a)} \quad r \, db = \operatorname{tang} b \cos \Theta \operatorname{tang} (\psi - \Theta) \, d\varrho. \quad \text{b)} \quad 13)$$

Durch Division von 12d) durch 12e) ist aber:

$$\operatorname{tang} (\psi - \Theta) = -\cot b \sin P \cos (l - L),$$

also:

$$r \, db = -\cos \Theta \sin P \cos (l - L) \, d\varrho. \quad 14)$$

4\*

Die Formeln 13a) und 14) gestatten also die Berechnung von  $dl$  und  $db$  ohne Einführung neuer Hilfsgrößen. Man kann aber auch  $\Theta$  und  $P$  durch die gegebenen Koordinaten ersetzen. Zuvor sei jedoch noch darauf hingewiesen, dass die Gleichung 13b) auch aus der dritten der Gleichungen 1) unter Zuziehung der Gleichungen 8), 9) und der letzten Gleichung in 5) abgeleitet werden kann. Nach 1) und 5) ist:

$$db = \frac{\sin \beta - \sin b \sin \Theta}{r \cos b} dq = \frac{\operatorname{tang} b}{r \varrho} (r - \varrho \sin \Theta) dq, \quad (15)$$

und nach 8) und 9) ist:

$$\frac{r - \varrho \sin \Theta}{\varrho} = \cos \Theta \operatorname{tang} (\psi - \Theta). \quad (16)$$

Aus der Verbindung von 15) und 16) ergibt sich dann die Gleichung 13b). Da nun (vergleiche das Dreieck  $\odot_{\delta} \odot_{\delta} F$ ) und Gleichung 8)

$$\sin P = \frac{\sin \beta}{\sin \psi}, \quad \frac{\cos \Theta}{\sin \psi} = \frac{R}{r},$$

so verwandelt sich die Gleichung 15) in:

$$db = -\frac{R}{r^2} \sin \beta \cos (l - l) dq = -\frac{R}{r} \sin b \cos (l - L) \frac{dq}{\varrho}. \quad (17)$$

Diese Gleichung hätte auch direkt aus 4) mit Hülfe der zur Berechnung der heliocentrischen Koordinaten dienenden Formeln abgeleitet werden können.

Zählt man in der zweiten der zur Berechnung der heliocentrischen Koordinaten dienenden Gleichungen die Länge von  $l$  aus, so ist:

$$\sin (\lambda - l) \cos \beta = + \frac{R}{\varrho} \sin (L - l). \quad (18)$$

Sonach kann man die Gleichung 2) auch schreiben:

$$dl = -\frac{R \sin (l - L)}{r \cos b} \frac{dq}{\varrho}. \quad (19)$$

Gleichungen 19), 17) und die letzte von 5) ermöglichen daher die direkte Berechnung von  $dl$ ,  $db$  und  $dr$  auf Grund lauter den Tafeln bereits entnommenen Größen. Dieselben sind mit den noch abzuleitenden Formeln zur Korrektur der Elemente etc. in der am Ende dieses Paragraphen sich befindlichen Zusammenstellung aufgenommen.

Um die Korrekturen  $d\Omega$  und  $di$ , welche zunächst vorgenommen werden sollen, abzuleiten, bediene man sich der bekannten Relation:

$$\operatorname{tang} b = \operatorname{tang} i \sin(l - \Omega). \quad 20a)$$

Durch logarithmische Differentiation erhält man für den ersten und dritten Ort:

$$\frac{db_1}{\sin b_1 \cos b_1} = \frac{di}{\sin i \cos i} + \frac{d(l_1 - \Omega)}{\operatorname{tang}(l_1 - \Omega)}, \quad \frac{db_3}{\sin b_3 \cos b_3} = \frac{di}{\sin i \cos i} + \frac{d(l_3 - \Omega)}{\operatorname{tang}(l_3 - \Omega)} \quad 20)$$

Die Subtraktion dieser Gleichungen ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{db_3}{\sin b_3 \cos b_3} - \frac{db_1}{\sin b_1 \cos b_1} &= \cot(l_3 - \Omega) dl_3 - \cot(l_1 - \Omega) dl_1 \\ &+ \frac{\sin(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - \Omega) \sin(l_1 - \Omega)} d\Omega. \end{aligned} \quad 21)$$

Behält man auf der rechten Seite nur das mit  $d\Omega$  multiplizierte Glied, so erhält man auf der linken Seite die Differenz zweier Ausdrücke von der Form:

$$\frac{db}{\sin b \cos b} - \cot(l - \Omega) dl. \quad 22)$$

Führt man für  $db$  und  $dl$  ihre Werte ein nach Gleichungen 2) und 5), indem man zugleich einsetzt:

$$r = \frac{e \sin \beta}{\sin b},$$

so geht der Ausdruck 22) über in

$$\frac{\cos b \sin \beta - \sin b \cos \beta \cos(\lambda - l)}{\cos b \sin \beta} \frac{de}{e} - \frac{\sin b \cos \beta \cot(l - \Omega) \sin(\lambda - l)}{\cos b \sin \beta} \frac{de}{e},$$

oder auch

$$\left\{ 1 - \frac{\operatorname{tang} b \sin(\lambda - \Omega)}{\operatorname{tang} \beta \sin(l - \Omega)} \right\} \frac{de}{e}. \quad 23)$$

Setzt man ein:

$$\frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{e}{r}, \quad 23b)$$

und bedenkt man, dass

$$\left. \begin{aligned} e \cos \beta \sin(\lambda - \Omega) &= r \cos b \sin(l - \Omega) + R \sin(L - \Omega) \\ e \cos \beta \cos(\lambda - \Omega) &= r \cos b \cos(l - \Omega) + R \cos(L - \Omega) \end{aligned} \right\} 24)$$

so verwandelt sich der Ausdruck 23) nach der ersten dieser Gleichungen in:

$$-\frac{R \sin(L - \Omega)}{r \cos b \sin(l - \Omega)} \frac{d\varrho}{\varrho}. \quad 25)$$

Man erhält daher durch Einsetzung dieser Relation für beide Örter statt 21) die Gleichung:

$$\frac{\sin(l_3 - l_1)}{\sin(l_3 - \Omega) \sin(l_1 - \Omega)} d\Omega = \frac{R_1 \sin(L_1 - \Omega)}{r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \Omega)} \frac{d\varrho_1}{\varrho_1} - \frac{R_3 \sin(L_3 - \Omega)}{r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - \Omega)} \frac{d\varrho_3}{\varrho_3}, \quad 26)$$

wodurch  $d\Omega$  bestimmt ist.

Addiert man jedoch die beiden Gleichungen in 20), so erhält man auf ganz ähnliche Weise, wie Gleichung 26) abgeleitet wurde:

$$\frac{2 di}{\sin i \cos i} = \frac{-R_1 \sin(L_1 - \Omega)}{r_1 \cos b_1 \sin(l_1 - \Omega)} \frac{d\varrho_1}{\varrho_1} - \frac{R_3 \sin(L_3 - \Omega)}{r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - \Omega)} \frac{d\varrho_3}{\varrho_3} + \frac{\sin(l_3 - \Omega + l_1 - \Omega)}{\sin(l_3 - \Omega) \sin(l_1 - \Omega)} d\Omega.$$

Setzt man nun für  $d\Omega$  seinen Wert ein nach Gleichung 26), so wird:

$$di = \frac{\sin i \cos i}{\sin(l_3 - l_1)} \left\{ \frac{R_1 \sin(L_1 - \Omega) \cos(l_3 - \Omega)}{r_1 \cos b_1} \frac{d\varrho_1}{\varrho_1} - \frac{R_3 \sin(L_3 - \Omega) \cos(l_1 - \Omega)}{r_3 \cos b_3} \frac{d\varrho_3}{\varrho_3} \right\}, \quad 27)$$

welche Gleichung zur Berechnung von  $di$  dient.

Durch Einführung von:

$$J_1 = \frac{R_1 \sin(L_1 - \Omega)}{r_1 \cos b_1 \sin(l_3 - l_1)} \frac{d\varrho_1}{\varrho_1}, \quad J_3 = \frac{R_3 \sin(L_3 - \Omega)}{r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - l_1)} \frac{d\varrho_3}{\varrho_3} \quad 28)$$

verwandeln sich die Gleichungen 26) und 27) in:

$$\left. \begin{aligned} d\Omega &= J_1 \sin(l_3 - \Omega) - J_3 \sin(l_3 - \Omega) \\ di &= \sin i \cos i \{ J_1 \cos(l_3 - \Omega) - J_3 \cos(l_3 - \Omega) \}. \end{aligned} \right\} \quad 29)$$

Die Aufstellung von Formeln zur Berechnung von  $d(u_3 - u_1)$  kann auf verschiedene Weisen erfolgen. Jedoch empfiehlt es sich nicht von der Relation:

$$s^2 = r_1^2 + r_3^2 - 2r_1 r_3 \cos(u_3 - u_1)$$

auszugehen, einmal weil  $\frac{ds}{d\varrho_1}$  und  $\frac{ds}{d\varrho_3}$  oder auch  $\frac{ds}{dM}$  nur in dem Falle bereits bekannt sind, wenn man die Korrektur in  $\varrho_1$  für eine gegebene Korrektur in  $M$  auf

differentiellem Wege ermittelt hat, was nicht immer der Fall ist; außerdem lassen sich auf anderem Wege bequemere Formeln aufstellen. Wendet man nämlich auf die zweite der Gleichungen:

$$\sin u \sin i = \sin b, \quad \cos u = \cos b \cos(l - \Omega), \quad \sin u \cos i = \cos b \sin(l - \Omega) \quad 30)$$

die logarithmische Differentiation an, so ist:

$$\text{tang } u \, du = \text{tang } b \, db + \text{tang } (l - \Omega) \, d(l - \Omega).$$

Dividiert man nun beide Seiten durch  $\text{tang } u$ , so ist nach 30):

$$du = \sin i \cos(l - \Omega) \, db + \cos i \, d(l - \Omega). \quad 31)$$

Daher auch:

$$d(u_3 - u_1) = \sin i [\cos(l_3 - \Omega) \, db_3 - \cos(l_1 - \Omega) \, db_1] + \cos i \, d(l_3 - l_1). \quad 32)$$

In ganz ähnlicher Weise erhält man aus der ersten Gleichung in 30):

$$d(u_3 - u_1) = \frac{1}{\sin i} \left[ \frac{db_3}{\cos(l_3 - \Omega)} - \frac{db_1}{\cos(l_1 - \Omega)} - \frac{\sin(l_3 - l_1)}{\cos(l_1 - \Omega) \cos(l_3 - \Omega)} \, di \right]. \quad 33)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen 17), 23b), 19) und 30) wird Gleichung 31):

$$d(u_3 - u_1) = -\cos i \left. \begin{aligned} & \frac{R_3 \sin(l_3 - L_3)}{r_3 \cos b_3} [1 + \sin^2 b_3 \cot(l_3 - L_3) \cot(l_3 - \Omega)] \frac{dq_3}{q_3} \\ & + \cos i \frac{R_1 \sin(l_1 - L_1)}{r_1 \cos b_1} [1 + \sin^2 b_1 \cot(l_1 - L_1) \cot(l_1 - \Omega)] \frac{dq_1}{q_1}, \end{aligned} \right\} 34)$$

wodurch wiederum die Korrektur in  $(u_3 - u_1)$  unmittelbar durch die Änderungen in  $q_1$  und  $q_3$  gegeben ist.

Mit Hilfe der Korrektur in  $(u_3 - u_1)$  lassen sich nun die Korrekturen in den mittleren Anomalien und in  $q$  leicht ableiten und zwar kann man entweder von der Änderung in  $v_1$  ausgehen und damit diejenige in  $q$  berechnen oder man kann umgekehrt verfahren. Zunächst soll das erstere Verfahren auseinandergesetzt werden. Die Differentiation der bekannten Relation:

$$\text{tang } \frac{1}{2} v_1 = \cot \frac{1}{2} (u_3 - u_1) - \text{cosec } \frac{1}{2} (u_3 - u_1) \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \quad 35)$$

ergibt:

$$\sec^2 \frac{1}{2} v_1 \, dv_1 = \text{cosec}^2 \frac{1}{2} (u_3 - u_1) \left\{ -d(u_3 - u_1) + \cos \frac{1}{2} (u_3 - u_1) \sqrt{\frac{r_1}{r_3}} \, d(u_3 - u_1) - \sin \frac{1}{2} (u_3 - u_1) \sqrt{\frac{r_3}{r_1}} \frac{r_3 \, dr_1 - r_1 \, dr_3}{r_3^2} \right\}. \quad 36)$$

Da aber

$$r = q \sec^2 \frac{1}{2} v, \quad (37)$$

so ist auch

$$\sqrt{\frac{r_1}{r_3}} = \frac{\cos \frac{1}{2} v_3}{\cos \frac{1}{2} v_1}, \quad (38)$$

und somit wird der Koeffizient von  $d(u_3 - u_1)$  in 36):

$$\cos \frac{1}{2} (u_3 - u_1) \frac{\cos \frac{1}{2} v_3}{\cos \frac{1}{2} v_1} - 1 = \frac{\sin \frac{1}{2} v_3}{\cos \frac{1}{2} v_1} \sin \frac{1}{2} (v_1 - v_3). \quad (39)$$

Multipliziert man nun beide Seiten von 36) mit  $\cos^2 \frac{1}{2} v_1$  oder auch beziehungsweise mit  $\frac{q}{r_1}$ , was gleichbedeutend ist, so ist nach Gleichung 39):

$$dv_1 = -\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (u_3 - u_1) \left[ \cos \frac{1}{2} v_1 \sin \frac{1}{2} v_3 d(u_3 - u_1) + q \frac{r_3 dr_1 - r_1 dr_3}{(r_1 r_3)^{3/2}} \right],$$

oder nach 37):

$$dv_1 = -\frac{\cos \frac{1}{2} v_1}{\sin \frac{1}{2} (u_3 - u_1)} \left[ \sin \frac{1}{2} v_3 d(u_3 - u_1) + \cos \frac{1}{2} v_3 \left( \frac{dr_1}{r_1} - \frac{dr_3}{r_3} \right) \right]. \quad (40)$$

Differenziert man ferner die Gleichung 37), so erhält man nach einigen Umformungen:

$$q \sin \frac{1}{2} v dv + \cos \frac{1}{2} v dq = q \cos \frac{1}{2} v \frac{dr}{r}. \quad (41)$$

Daher besteht die folgende Gleichung zur Bestimmung von  $dq$  mit Hilfe von  $dv_1$ :

$$\frac{dq}{q} = \frac{dr_1}{r_1} - \tan \frac{1}{2} v_1 dv_1 = \frac{dr_3}{r_3} - \tan \frac{1}{2} v_3 dv_3, \quad (42)$$

wobei zu setzen ist:

$$dv_3 = d(u_3 - u_1) + dv_1. \quad (43)$$

Will man jedoch die Änderung in  $q$  zuerst bestimmen, so kann man dazu die Gleichung 41) verwenden, indem man sie auf den ersten und dritten Ort anwendet,

dann die auf den ersten Ort bezogene Gleichung mit  $\sin \frac{1}{2} v_3$ , die andere mit  $\sin \frac{1}{2} v_1$ , multipliziert und endlich die Resultate subtrahiert. Man erhält dann zunächst:

$$\begin{aligned} q \sin \frac{1}{2} v_1 \sin \frac{1}{2} v_3 d(v_3 - v_1) \sin 1'' + dq \sin \frac{1}{2} (v_1 - v_3) \\ = \cos \frac{1}{2} v_3 \sin \frac{1}{2} v_1 q \frac{dr_3}{r_3} - \cos \frac{1}{2} v_1 \sin \frac{1}{2} v_3 \frac{dr_1}{r_1}, \end{aligned} \quad 44)$$

oder auch

$$\frac{dq}{q} = \frac{\sin \frac{1}{2} v_1 \sin \frac{1}{2} v_3}{\sin \frac{1}{2} (u_3 - u_1)} \left\{ d(u_3 - u_1) \sin 1'' + \cot \frac{1}{2} v_1 \frac{dr_1}{r_1} - \cot \frac{1}{2} v_3 \frac{dr_3}{r_3} \right\}. \quad 45)$$

Nach 42) ist dann:

$$dv_1 = \frac{\cot \frac{1}{2} v_1}{\sin 1''} \left[ \frac{dr_1}{r_1} - \frac{dq}{q} \right]; \quad dv_3 = \frac{\cot \frac{1}{2} v_3}{\sin 1''} \left[ \frac{dr_3}{r_3} - \frac{dq}{q} \right]. \quad 46)$$

Weiter ist:

$$d\omega = du_1 - dv_1 = du_3 - dv_3. \quad 47)$$

Um schließlich noch die Änderung in der Perihelzeit zu bestimmen, soll von der Gleichung:

$$M = \frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tang} \frac{1}{2} v + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} v = \frac{t}{q^{3/2}}, \quad 48)$$

welche die Grundlage für die am Ende des ersten Bandes von v. Oppolzer's Lehrbuch befindlichen Barker'schen Tafeln bildet, ausgegangen werden. Durch Differentiation erhält man zunächst mit Rücksicht auf Gleichung 37):

$$dM = \frac{\sin 1''}{k \sqrt{2}} \frac{r^2}{q^2} dv, \quad 49)$$

und:

$$d \log M = d \log t - \frac{3}{2} d \log q. \quad 50)$$

Da nun  $t$  der Zeitabstand der Beobachtung vom Periheldurchgang ab gerechnet ist, so ist:

$$d \log t = \frac{dt}{t} \operatorname{Mod.} = -\frac{dT}{t} \operatorname{Mod.}, \quad 51)$$

wo mit  $T$  die Epoche des Periheldurchganges bezeichnet ist. Setzt man nun die Gleichung 49) ebenfalls logarithmisch und eliminiert  $d \log M$  durch Einsetzung seines Wertes nach Gleichungen 50) und 51), so erhält man:

$$\frac{\sin 1''}{k \sqrt{2}} \frac{r^2}{q^2} \frac{\text{Mod.}}{M} dv = - \frac{dT}{t} \text{Mod.} - \frac{3}{2} d \log q. \quad 52)$$

Es ist aber:

$$t = M q^{3/2}; \quad 53)$$

daher auch:

$$\frac{dT}{q^{3/2}} = - \frac{\sin 1''}{k \sqrt{2}} \frac{r^2}{q^2} dv - \frac{3}{2} \frac{M}{\text{Mod.}} d \log q,$$

oder endlich, wiederum mit Rücksicht auf die Relation 53):

$$dT = - \frac{\sin 1''}{k \sqrt{2}} \frac{r^2}{q^{1/2}} dv - \frac{3}{2} \frac{t}{\text{Mod.}} d \log q. \quad 54)$$

Setzt man nun noch:

$$c_1 = - \frac{\sin 1''}{k \sqrt{2}}; \quad c_2 = - \frac{3}{2} \frac{1}{\text{Mod.}},$$

wo

$$\log c_1 = 6,299479; \quad \log c_2 = 0,538307, \quad 55)$$

so ist endlich:

$$dT = c_1 \frac{r_1^2}{q^{1/2}} dv_1 + c_2 t_1 d \log q = c_1 \frac{r_3^2}{q^{1/2}} dv_3 + c_2 t_3 d \log q. \quad 56)$$

Stellt man nun die bisher gewonnenen Formeln zusammen, so ergibt sich folgender Rechenmechanismus zur Verbesserung der Elemente auf differentiellem Wege:

$$\left. \begin{aligned} dl_1 &= a \frac{R_1}{r_1} \frac{\sin(l_1 - L_1)}{\cos b_1} d \log e_1; & dl_3 &= a \frac{R_3}{r_3} \frac{\sin(l_3 - L_3)}{\cos b_3} d \log e_3 \\ db_1 &= a \frac{R_1}{r_1} \frac{\cos(l_1 - L_1)}{\text{cosec } b_1} d \log e_1; & db_3 &= a \frac{R_3}{r_3} \frac{\cos(l_3 - L_3)}{\text{cosec } b_3} d \log e_3 \\ \log a &= \text{colog}(-\text{Mod.} \sin 1'') = 5,676641 \\ d \log r_1 &= \left[ 1 + \frac{R_1 \cos(l_1 - L_1)}{r_1 \sec b_1} \right] d \log e_1; & d \log r_3 &= \left[ 1 + \frac{R_3 \cos(l_3 - L_3)}{r_3 \sec b_3} \right] d \log e_3 \\ \text{oder} & & & \\ d \log r_1 &= \frac{e_1}{r_1} \sin \Theta_1 d \log e_1; & d \log r_3 &= \frac{e_3}{r_3} \sin \Theta_3 d \log e_3 \end{aligned} \right\} \text{I}$$



$$\left. \begin{aligned} J_1 &= a \frac{R_1 \sin(L_1 - \Omega)}{r_1 \cos b_1 \sin(l_3 - l_1)} d \log \varrho_1; & J_3 &= a \frac{R_3 \sin(L_3 - \Omega)}{r_3 \cos b_3 \sin(l_3 - l_1)} d \log \varrho_3 \\ d\Omega &= J_3 \sin(l_1 - \Omega) - J_1 \sin(l_3 - \Omega) \\ di &= \{J_3 \cos(l_1 - \Omega) - J_1 \cos(l_3 - \Omega)\} \sin i \cos i \end{aligned} \right\} \text{II}$$

$$\left. \begin{aligned} du_1 &= \sin i \cos(l_1 - \Omega) db_1 + \cos i (dl - d\Omega) \\ d(u_3 - u_1) &= \sin i [\cos(l_3 - \Omega) db_3 - \cos(l_1 - \Omega) db_1] + \cos i d(l_3 - l_1) \end{aligned} \right\} \text{III}$$

$$\left. \begin{aligned} dv_1 &= -\frac{\cos \frac{1}{2} v_1}{\sin \frac{1}{2} (u_3 - u_1)} \left[ \sin \frac{1}{2} v_3 d(u_3 - u_1) + a \cos \frac{1}{2} v_3 (d \log r_3 - d \log r_1) \right] \\ d \log q &= d \log r_1 + \frac{\text{tang} \frac{1}{2} v_1}{a} dv_1 = d \log r_3 + \frac{\text{tang} \frac{1}{2} v_3}{a} dv_3 \\ dv_3 &= d(u_3 - u_1) + dv_1; & d\omega &= du_1 - dv_1 = du_3 - dv_3 \end{aligned} \right\} \text{IV a}$$

oder

$$\left. \begin{aligned} d \log q &= \frac{\sin \frac{1}{2} v_1 \sin \frac{1}{2} v_3}{\sin \frac{1}{2} (u_3 - u_1)} \left[ -\frac{d(u_3 - u_1)}{a} + \cot \frac{1}{2} v_1 d \log r_1 - \cot \frac{1}{2} v_3 d \log r_3 \right] \\ dv_1 &= a \cot \frac{1}{2} v_1 [d \log q - d \log r_1]; & dv_3 &= a \cot \frac{1}{2} v_3 [d \log q - d \log r_3] \\ d\omega &= du_1 - dv_1 = du_3 - dv_3 \end{aligned} \right\} \text{IV b}$$

$$\left. \begin{aligned} dT &= c_1 \frac{r_1^2}{q^{1/2}} dv_1'' + c_2 t_1 d \log q = c_1 \frac{r_3^2}{q^{1/2}} dv_3'' + c_2 t_3 d \log q \\ \log c_1 &= 6_n.299479 - 10; & \log c_2 &= 0_n.538307. \end{aligned} \right\} \text{V}$$

## § 2. Beispiel.

Als Beispiel der Anwendung dieser Formeln wähle ich die ersten Elemente des Kometen III 1881, wie dieselben von v. Oppolzer auf Seite 310 et sequ. seines Lehrbuchs zur Erläuterung der Olbers'schen Methode bestimmt worden sind. Trotzdem in diesem Falle die Darstellung des mittleren Ortes bereits eine befriedigende ist, wird von ihm gezeigt, dass eine bedeutende Verbesserung möglich ist. Es wird zunächst die Verbesserung von  $M$  durch Anwendung verschiedener Methoden vorgenommen und schliesslich folgende Korrektion des Wertes von  $\log M$  von ihm adoptiert:

$$d \log M = -0.000168; \quad \log (d \log M) = 6_n.22531; \quad \log dM = 6_n.70368.$$

Ferner findet sich daselbst:

$$\log \left( \frac{d\varrho_1}{dM} \right) = 9,86886,$$

so dass:

$$\log d\varrho_1 = 6.57254, \quad \log (d \log \varrho_1) = 6.70049.$$

Da außerdem:

$$d \log \varrho_3 = d \log M + d \log \varrho_1,$$

so erhält man durch Anwendung von Additions- und Subtraktionslogarithmen:

$$\log (d \log \varrho_3) = 6.52342.$$

v. Oppolzer bestimmt nun die auf den neuen Werten von  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  beruhenden Elemente auf die gewöhnliche Weise durch direkte Neurechnung. Es soll nun jetzt die Verbesserung der Elemente auf differentiellem Wege vorgenommen werden. Freilich sind die angenommenen Änderungen von  $\varrho_1$  und  $\varrho_3$  nicht sehr bedeutend, und giebt daher dieses Beispiel keinen Aufschluss darüber, wie weit man in der Anwendung der obigen Formeln gehen darf. Es ist jedoch hier auch nur beabsichtigt, die Differentialformen durch ein Beispiel zu erläutern, während die Grenze der Anwendbarkeit derselben erst untersucht werden kann, nachdem später die Glieder zweiter Ordnung abgeleitet worden sind. Die hier folgenden Zahlen etc. sind, soweit sie sich aus der Rechnung nicht selbst erklären, der ersten Rechnung von v. Oppolzer entnommen.

(Nach I.) Berechnung von  $\log (d \log r_1)$ ,  $\log (d \log r_3)$ ,  $dl_1$ ,  $dl_3$ ,  $\log db_1$ ,  $\log db_3$ .

$\log \varrho_1$	9.50983	$\log \varrho_3$	9.62598
$\log \sin \vartheta_1$	9,86433	$\log \sin \vartheta_3$	9,53069
$\text{colog } r_1$	0.12155	$\text{colog } r_3$	0.10104
$\log (d \log \varrho_1)$	6.70049	$\log d (\log \varrho_3)$	6.52342
$\log (d \log r_1)$	6,19620	$\log d (\log \varrho_1)$	5,78113
$\log \cot \frac{1}{2} v_1$	0.76907	$\log \cot \frac{1}{2} v_3$	0.55197
$\log \sin (l_1 - L_1)$	8,69023	$\log \sin (l_3 - L_3)$	8,72017
$\log \sec b_1$	0.00994	$\log \sec b_3$	0.03543
$\log R_1$	0.00721	$\log R_3$	0.00724
$\log \frac{ad \log \varrho_1}{r_1}$	2,49868	$\log \frac{ad \log \varrho_3}{r_3}$	2,30110
$\log \sin b_1$	9.32530	$\log \sin b_3$	9.58861
$\log \cos (l_1 - L_1)$	9,99948	$\log \cos (l_3 - L_3)$	1,99940
$\log db_1''$	1.83067	$\log db_3''$	1.89635
$\log dl_1''$	1.20606	$\log dl_3''$	1.06394
$dl_1''$	16.''072	$dl_3''$	11.''586

(Nach II.) Berechnung von  $d\Omega$  und  $di$ .

$L_1 - \Omega$	183° 23' 44"	$L_3 - \Omega$	189° 7' 38"
$\log \sin (L_1 - \Omega)$	8,77253	$\log \sin (L_3 - \Omega)$	9,20037
$\log \frac{aR_1 d \log \varrho_1}{r_1 \cos b_1}$	2,51583	$\log \frac{aR_3 d \log \varrho_3}{r_3 \cos b_3}$	2,34377
$\text{colog} \sin (l_3 - l_1)$	0.98567	$\text{colog} \sin (l_3 - l_1)$	0.98567
$\log \sin (l_3 - \Omega)$	9.32272	$\log \sin (l_1 - \Omega)$	9.03372
$\log J_1$	2.27403	$\log J_3$	2.52981
$\log \cos (l_3 - \Omega)$	9.99018	$\log \cos (l_1 - \Omega)$	9.99745
$J_1 \sin (l_3 - \Omega)$	1.59675	$J_1 \cos (l_3 - \Omega)$	2.26421
$J_3 \sin (l_1 - \Omega)$	1.56353	$J_3 \cos (l_1 - \Omega)$	2.52726
subtr.	8.9003	subtr.	9.9204
$\log d\Omega''$	0,4638	$\log \sin i$	9.95164
$d\Omega''$	- 2."910	$\log \cos i$	9.65013
		$\log di''$	1.7864
		$di$	61."149

(Nach III und IVb). Berechnung von  $du_1, du_3, d \log q, dv_1, dv_3, d\omega$ .

$\log \sin i$	9.95164	$\log \sin i$	9.95164
$\log \cos (l_1 - \Omega)$	9.99745	$\log \cos (l_3 - \Omega)$	9.99018
$\log db_1$	1.83067	$\log db_3$	1.89635
$\log \cos i$	9.65013	$\log \cos i$	9.65013
$\log (dl_1 - d\Omega)$	1.27834	$\log (dl_3 - d\Omega)$	1.16125
$\log [du_1]_1$	1.77976	$\log [du_3]_1$	1.83817
$\log [du_1]_2$	0.92847	$\log [du_3]_2$	0.81138
add.	0.05722	add.	0.03902
$\log du_1''$	1.83698	$\log du_3''$	1.87719
$du_1''$	68".704	$du_3''$	75".368
$\log d(u_3'' - u_1'')$	0.82373	$d(u_3'' - u_1'')$	6".664
(1) = $\log \frac{d(u_3'' - u_1'')}{a}$	5,14709	(2) = $\log \left( \cot \frac{1}{2} v_1 d \log r_1 \right)$	6,96527
$\log [(2) - (3)]$	6,84992	(3) = $\log \left( \cot \frac{1}{2} v_3 d \log r_3 \right)$	6,33310
subtr.	9.99131	subtr.	9.88465
$\log [(2) - (3) - (1)]$	6,84123	$\log (d \log r_1)$	6,19620
$\log \sin \frac{1}{2} v_1$	9.22473	$\log (d \log q)$	6,47732
$\log \sin \frac{1}{2} v_3$	9.43157	$\log (d \log r_3)$	5,78113

$\log \operatorname{cosec} \frac{1}{2}(u_3 - u_1)$	0.97979	[subtr.] <sub>1</sub>	9.95922
$\log (d \log q)$	6.47732	$\log \left( a \cot \frac{1}{2} v_1 \right)$	6.44571
$d \log q$	-0.000300		
$\log dv_1''$	2.60113	[subtr.] <sub>3</sub>	9.90239
$\log dv_3''$	2.60832	$\log \left( a \cot \frac{1}{2} v_3 \right)$	6.22861
$d\omega_1$	-330''.44	$d\omega_3$	-330''.44

(Nach V). Berechnung von  $dT$ .

$\log \frac{c_1 dv_1''}{q^{1/2}}$	8.96758	$\log \frac{c_1 dv_3''}{q^{1/2}}$	8.97477
$2 \log r_1$	9.75690	$2 \log r_3$	9.79792
$\log \frac{c_1 r_1^2 dv_1''}{q^{1/2}}$	8.72448	$\log \frac{c_1 r_3^2 dv_3''}{q^{1/2}}$	8.77269
$\log (c_2 t_1 d \log q)$	7.96474	$\log (c_2 t_3 d \log q)$	8.18891
subtr.	9.91704	subtr.	9.86879
$\log dT$	8.64152	$\log dT'$	8.64148
$dT$	-0.043805	$dT'$	-0.043801

Im Mittel  $dT = -0.043803$  Tage.

Stellt man die hier auf differentiellem Wege und die von v. Oppolzer durch direkte Neurechnung erzielten Korrekturen der Elemente und der zu ihrer Bestimmung aus  $e_1$  und  $e_3$  notwendigen Größen zusammen, so ergibt sich folgende Übersicht:

	v. Opp. Neurechg.	Diff. Formeln		v. Opp. Neurechg.	Diff. Formeln
$dl_1$	+ 16''.0	+ 16''.1	$dl_3$	+ 11''.5	+ 11''.6
$d \log \operatorname{tang} b_1$	+ 0.000688	+ 0.000688	$d \log \operatorname{tang} b_3$	+ 0.000463	+ 0.000464
$d \log r_1$	- 0.000156	- 0.000157	$d \log r_3$	- 0.000060	- 0.000060
$du_1$	+ 68''.7	+ 68''.7	$du_3$	+ 75''.4	+ 75''.4
$dv_1$	+ 402''.0	+ 399''.1	$dv_3$	+ 408''.7	+ 405''.8
$dT$	- 0.044120	- 0.043803	$d\pi$	- 336''.2	- 333''.3
$d\omega$	- 333''.3	- 330''.4	$di$	+ 61''.4	+ 61''.1
$dA$	- 2''.9	- 2''.9	$d \log q$	- 0.000302	- 0.000300

Die Endresultate stimmen also vollständig überein bis auf die Gröfsen  $dT$  und  $d\omega$  oder  $d\pi$ . Die Abweichung dieser Gröfsen beruht aber auf dem Unterschied von 2".9 in den nach den beiden Methoden gerechneten Werten von  $dv_1$  und  $dv_3$ . Bedenkt man nun, dass bei Benutzung der Formeln:

$$\frac{1}{\sqrt{q}} \cos \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}}; \quad \frac{1}{\sqrt{q}} \sin \frac{1}{2} v_1 = \frac{\cot \frac{1}{2} (u_3 - u_1)}{\sqrt{r_1}} - \frac{\operatorname{cosec} \frac{1}{2} (u_3 - u_1)}{\sqrt{r_3}} \quad 57)$$

die Bestimmung von  $v_1$  und  $v_3$  besonders unsicher ist, wenn die Zwischenzeiten verhältnismäfsig klein sind, so ist es klar, dass die durch die Differentialformeln gewonnenen Werte die genaueren sind. Diese Behauptung wird im allgemeinen bei der Darstellung des mittleren Ortes ihre Bestätigung finden. Doch auch unseren Differentialformeln II, IVa und IVb haftet eine ähnliche Unsicherheit an wie 57), indem jedesmal die Differenz zweier nahezu gleicher Gröfsen durch die kleinen Werte  $\sin(l_3 - l_1)$ , beziehungsweise  $\sin(u_3 - u_1)$  dividiert ist. Die Unsicherheit ist jedoch nur eine scheinbare, denn einmal braucht man die Differenzen nicht so genau zu kennen wie in Formel 57), da die gesuchten Gröfsen  $d\Omega$  etc. differentieller Natur sind, auferdem aber ist die Gefahr, dass die Gröfsen, deren Differenz in Betracht kommt, sich einander sehr nähern, in den Formeln II und IV eine viel geringere wie in der Formel 57). Auch bei kurzen Zwischenzeiten liegen die Verhältnisse noch sehr günstig, wovon man sich leicht durch einen oberflächlichen Vergleich der betreffenden Formeln überzeugen kann. Bei der direkten Neurechnung geht natürlich auch die den Werten von  $v_1$  und  $v_3$  nach 57) anhaftende Unsicherheit in die der Barker'schen Tafel zu entnehmenden Werte von  $M_1$  und  $M_3$  ein und beeinträchtigt daher auch die Genauigkeit der Perihelzeit, und zwar in zweifacher Weise. Erstens wird eine konstante Abweichung der aus dem ersten und dritten Orte erhaltenen Werte von  $T$  von der wahren Perihelzeit stattfinden, und zweitens werden die beiden Werte von  $T$  von einander mehr oder weniger verschieden sein. In der ersten Rechnung des obigen Beispiels, die von Oppolzer sechsstellig ausgeführt wurde, beträgt der Unterschied der beiden Werte von  $T$  110 Einheiten der sechsten Decimale, so dass eine derartige Unsicherheit auch in der Neurechnung zu erwarten ist, während bei Anwendung der Differentialformeln auf dies Beispiel der Unterschied in den beiden Werten von  $T$  nur 4 Einheiten der sechsten Stelle beträgt. Auferdem aber weicht die durch direkte Neurechnung erzielte Perihelzeit von dem genaueren, nach den Differentialformeln berechneten Werte von  $T$  um 317 Einheiten der sechsten Stelle ab.

Aufer demjenigen der gröfseren Genauigkeit besitzen die Differentialformeln noch den Vorzug, dass bei ihrer Anwendung fast durchweg Logarithmen, Winkel etc. in Betracht kommen, die fast alle der ersten Rechnung entnommen werden können. Trägt man daher gleich bei der ersten Rechnung die nötigen Zahlen in

ein Rechnungs-Formular ein, das den Differentialformeln entspricht, so wird man sich später bei etwaiger Verbesserung von  $M$  und daher auch von  $q_1$  und  $q_3$  die neuen Elemente in sehr kurzer Zeit berechnen können. Dabei kann man sich mit weniger Decimalstellen begnügen als bei der direkten Neurechnung. Im obigen Beispiel wären vierstellige Logarithmen und stellenweise dreistellige vollständig ausreichend gewesen.

Schließlich kann man sich wegen der großen Genauigkeit der Differentialformeln die Rechnung von  $dv_3$  und somit auch die Doppelrechnung von  $d \log q$ ,  $d\omega$  und  $dT$  ersparen.

Hat man Gründe, die Genauigkeit des neuen Wertes von  $M$  zu bezweifeln und will man sich durch Rechnung des mittleren Ortes möglichst rasch Gewissheit über die Richtigkeit des Wertes von  $M$  verschaffen, so kann man vorläufig die Ermittlung von  $d \log q$  und  $dT$  gänzlich umgehen, indem man außer I, II, III nur noch  $dv_1$ ,  $dv_3$  und  $d\omega$  (aus IVa) berechnet und dann sofort die Korrekturen von  $dv_3$  und  $dr_3$  aufsucht. Eliminiert man nämlich  $dT$  aus den beiden Gleichungen 56), so ist:

$$c_1(r_3^2 dv_3'' - r_1^2 dv_1'') = -c_2 q^{1/2} d \log q (t_3 - t_1),$$

und ebenso ist:

$$c_1(r_2^2 dv_2'' - r_1^2 dv_1'') = -c_2 q^{1/2} d \log q (t_2 - t_1).$$

Dividiert man diese beiden Gleichungen durch einander und löst das Resultat nach  $dv_2''$  auf, so erhält man folgenden Ausdruck zur Berechnung von  $dv_2''$ :

$$dv_2'' = \frac{1}{r_2^2} \left[ r_3^2 dv_3'' \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} + r_1^2 dv_1'' \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \right], \quad \text{VI}_1$$

wobei für  $\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1}$  und  $\frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}$  und die ursprünglichen Werte von  $\frac{r_3}{r_2}$  und  $\frac{r_1}{r_2}$  gesetzt werden können.

Ferner ist nach 42):

$$d \log r_2 - d \log r_1 = \frac{1}{a} \left[ \tan \frac{1}{2} v_1 dv_1'' - \tan \frac{1}{2} v_2 dv_2'' \right]. \quad \text{VI}_2$$

Mit den neuen Werten von  $i$ ,  $\Omega$ ,  $r_3$  und  $u_2$  kann nun der mittlere Ort in der üblichen Weise gerechnet werden. Es lassen sich jedoch auch ziemlich bequeme Differentialformeln hierzu aufstellen. Dieselben mögen der Vollständigkeit wegen hier abgeleitet werden, obwohl ihre Anwendung eine Zeitersparnis nicht in sich

schließt. Differentiiert man die Gleichungen, welche zur Darstellung des mittleren Ortes dienen, so ist mit Auslassung des zum zweiten Ort gehörigen Subskriptes:

$$d\varrho \cos \beta \cos (\lambda - \Omega) - \varrho \cos \beta \sin (\lambda - \Omega) d(\lambda - \Omega) - \varrho \sin \beta \cos (\lambda - \Omega) d\beta = -r \sin u du + \cos u dr + R \sin (L - \Omega) d\Omega$$

$$d\varrho \cos \beta \sin (\lambda - \Omega) + \varrho \cos \beta \cos (\lambda - \Omega) d(\lambda - \Omega) - \varrho \sin \beta \sin (\lambda - \Omega) d\beta = r \cos u \cos i du - r \sin u \sin i di + \sin u \cos i dr - R \cos (L - \Omega) d\Omega$$

$$d\varrho \sin \beta + \varrho \cos \beta d\beta = r \cos u \sin i du + r \sin u \cos i di + \sin u \sin i dr \quad \} 58$$

Addiert man die beiden ersten Gleichungen einmal, nachdem die erste mit  $-\sin(\lambda - \Omega)$ , die zweite mit  $\cos(\lambda - \Omega)$ , dann wiederum, nachdem die erste mit  $\cos(\lambda - \Omega)$ , die zweite mit  $\sin(\lambda - \Omega)$  multipliziert worden ist, so hat man:

$$\begin{aligned} \varrho \cos \beta d(\lambda - \Omega) &= r \{ \sin u \sin (\lambda - \Omega) + \cos u \cos (\lambda - \Omega) \cos i \} du \\ &+ r \{ \cos u \sin (\lambda - \Omega) - \sin u \cos (\lambda - \Omega) \cos i \} ad \log r \\ &- r \sin u \cos (\lambda - \Omega) \sin i di \\ &- R \cos (\lambda - L) d\Omega \end{aligned} \quad 59a$$

$$\begin{aligned} \cos \beta d\varrho - \varrho \sin \beta d\beta &= -r \{ \sin u \cos (\lambda - \Omega) - \cos u \sin (\lambda - \Omega) \cos i \} du \\ &- r \{ \cos u \cos (\lambda - \Omega) + \sin u \sin (\lambda - \Omega) \cos i \} ad \log r \\ &- r \sin u \sin (\lambda - \Omega) \sin i di \\ &- R \sin (\lambda - L) d\Omega. \end{aligned} \quad 59b$$

Betrachtet man das sphärische Dreieck, dessen Ecken mit dem aufsteigenden Knoten, dem heliozentrischen Orte des Himmelskörpers und einem Punkte der Ekliptik, dessen Länge gleich  $(\lambda - \Omega)$  ist, zusammenfallen, so ist, wenn man den dem Winkel  $i$  gegenüberliegenden Bogen mit  $p$  bezeichnet:

$$\cos p = \cos u \cos (\lambda - \Omega) + \sin u \sin (\lambda - \Omega) \cos i. \quad 60$$

Das rechtwinkelige Dreieck, das von den Bogen  $\pm (l - \lambda)$ ,  $b$  und  $p$  eingeschlossen ist, ergibt aber:

$$\cos p = \cos b \cos (l - \lambda). \quad 61$$

Da jedoch  $l_2$  und  $b_2$  aus der ersten Rechnung gewöhnlich nicht bekannt sind, so setzt man besser:

$$r \cos b \cos (\lambda - l) = \rho \cos \beta - R \cos (\lambda - L), \quad 62)$$

welch' letzterer Ausdruck also gleich dem negativen Koeffizienten von  $a d \log r$  in 59b) ist. Bringt man in 59a)  $-\rho \cos \beta d\Omega$  auf die rechte Seite, so ist der Koeffizient von  $d\Omega$  ebenfalls durch 62) gegeben. Der Koeffizient von  $a d \log r$  in 59a) kann nach 30) auch geschrieben werden:

$$r \cos b \sin (\lambda - l) = -R \sin (\lambda - L), \quad 63)$$

und dieser letzte Ausdruck ist identisch mit dem Koeffizienten von  $d\Omega$  in 59b). Setzt man endlich:

$$\sin u = s \sin S; \quad \cos u \cos i = s \cos S, \quad 64)$$

so erhält man für die Koeffizienten von  $du$  in 59a) und 59b):

$$sr \cos [\lambda - \Omega - S] \quad \text{und} \quad sr \sin [\lambda - \Omega - S]. \quad \text{VII}_1$$

Gemäß der Relationen 61—64) können daher die Gleichungen 60) geschrieben werden:

$$\left. \begin{array}{ll} \rho \cos \beta d\lambda = sr \cos [\lambda - \Omega - S] du & \cos \beta d\rho - \rho \sin \beta d\beta = sr \sin [\lambda - \Omega - S] du \\ - R \sin (\lambda - L) a d \log r & - [\rho \cos \beta - R \cos (\lambda - L)] a d \log r \\ - r \sin u \cos (\lambda - \Omega) \sin i di & - r \sin u \sin (\lambda - \Omega) \sin i di \\ + [\rho \cos \beta - R \cos (\lambda - L)] d\Omega & - R \sin (\lambda - L) d\Omega \\ = (1) + (2) + (3) + (4) & = (5) + (6) + (7) + (8) = P. \end{array} \right\} \text{VII}_2$$

Dazu kommt noch die letzte Gleichung in 58):

$$\begin{aligned} \sin \beta d\rho + \rho \cos \beta d\beta &= r \cos u \sin i du - r \sin u \sin i a d \log r + r \sin u \cos i di \\ &= (9) + (10) + (11) = Q. \quad \text{VII}_3 \end{aligned}$$

Um die Anwendung des soeben entwickelten Verfahrens zu erläutern, soll nun der mittlere Ort für das obige Beispiel nach den Formeln V, VI und VII gerechnet werden.

Es sollen dabei die auf Grund der ersten Elemente verbesserten Zwischenzeiten verwendet werden, obwohl die ursprünglichen Werte dasselbe Resultat ergeben würden. Die zur Rechnung nötigen Daten sind der schon öfters für dies Beispiel citierten Stelle des Lehrbuches von v. Oppolzer entnommen.



(Nach VI.) Berechnung von  $dv_2''$  und  $dr_2$ .

$t_3 - t_1 = 3.002433.$	$t_3 - t_2 = 3.006713.$	$t_3 - t_1 = 6.009146.$	
$2 \log r_3$	9.79792	$2 \log r_1$	9.75690
$\log dv_3''$	2.60832	$\log dv_1''$	2.60113
$\log (t_3 - t_1)$	0.47747	$\log (t_3 - t_2)$	0.47809
	2.88371		2.83612
add.	0.27789		
$2 \operatorname{colog} r_2$	0.22463	$dv_2''$	404''.97
$\operatorname{colog} (t_3 - t_1)$	9.22119	$du_2''$	74''.53
$\log dv_3''$	2.60742	$\log a (d \log r_2 - d \log r_1)$	1.37267
$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2} v_2$	9.35408	$\log (a d \log r_1)$	1.87284
$\log \left( \operatorname{tang} \frac{1}{2} v_2 dv_2'' \right)$	1.96150	subtr.	9.83499
$\log \left( \operatorname{tang} \frac{1}{2} v_1 dv_1'' \right)$	1.83206	$\log (a d \log r_2)$	1.70783
subtr.	9.54061		

Ist die Rechnung jedoch schon bis zur Bestimmung von  $dT$  und  $d \log q$  fortgeschritten, so ist es etwas einfacher  $d \log r_2$  und  $dv_2''$  nach den Formeln (siehe IV und V):

$$dv_2'' = \frac{q^{1/2}}{c_1 r_2^3} [dT - c_2 t_2 d \log q]; \quad a d \log r_2 = a d \log q - \operatorname{tang} \frac{1}{2} v_2 dv_2''$$

zu berechnen.

(Nach VII.) Berechnung von  $d\lambda_2$  und  $d\beta_2$ .

$\sin u_2$	9.5304	$\log \sin (\lambda_2 - \Omega)$	8.3345
$\cos u_2 \cos i$	9.6236	$\log (r_2 \sin u \sin i di'')$	1.1561
$S$	38° 54'.0	$\log \cos (\lambda_2 - \Omega)$	9.9999
$\lambda_2 - \Omega - S$	139° 51'.7	$\log R_2 \sin (\lambda_2 - L_2)$	9.1228
$\log s$	9.7325	$\log R_2 \cos (\lambda_2 - L_2)$	0.0035
$\log \sin (\lambda_2 - \Omega - S)$	8.8093	$\log (e_2 \cos \beta_2)$	9.4540
$\log sr_2 du_2''$	1.4925	subtr.	9.8560
$\log \cos (\lambda_2 - \Omega - S)$	9.8834	$\log [ ]$	9.8595
		$\log (r \cos u \sin i)$	9.8128

6\*

log (1) 1,3759	(1) — 23".76	log (5) 1,3018	(5) + 20.04
log (2) 0,8306	(2) + 6.77	log (6) 1,5673	(6) + 36.92
log (3) 1,1560	(3) + 14.32	log (7) 9,4906	(7) — 0.31
log (4) 0,3233	(4) + 2.11	log (8) 9,5866	(8) — 0.37

$\rho_2 \cos \beta_2^\circ d\lambda_2^\circ$	— 0".56	log (9) 1,6851	(9) + 48.43
$P$	+ 56.28	log(10) 1,0776	(10) — 11.96
$Q$	+ 43.63	log(11) 0,8546	(11) + 7.16

log ( $\rho_2 \cos \beta_2 d\lambda_2^\circ$ )	9,748	log ( $P \sin \beta_2$ )	1,5537
log $\cos \beta_2 d\lambda_2^\circ$	0,182	log ( $Q \cos \beta_2$ )	1,5274
$\cos \beta_2 d\lambda_2^\circ$	— 1".52	subtr.	8,7954
$d\beta_2^\circ$	— 5".71	log $\rho_2 d\beta_2^\circ$	0,3228
		log $d\beta_2^\circ$	0,7563

$d\lambda_2^\circ$  und  $d\beta_2^\circ$  sind die Korrekturen, welche an den aus den ersten Elementen gerechneten mittleren Ort angebracht werden müssen, damit derselbe dem neuen Werte von  $M$  entspricht. Es ist dann im Sinne Beobachtung-Rechnung:

$$\cos \beta_2 d\lambda_2 = + 0".1 \qquad d\beta_2 = + ".9.$$

Rechnet man den mittleren Ort nach Ermittlung von  $dv_2$  und  $d \log r$  auf die gewöhnliche Weise, so erhält man:

$$\cos \beta_2 d\lambda_2 = + 0".1 \qquad d\beta_2 = + ".5.$$

v. Oppolzer findet durch direkte Neurechnung der Elemente:

$$\cos \beta_2 d\lambda_2 = + 0".5 \qquad d\beta_2 = - 0".4.$$

Die diesen drei Darstellungen des mittleren Ortes entsprechenden Werte von  $\cot J$  sind:

$$9,199880 \qquad 9,199877 \qquad 9,199883,$$

welche alle drei innerhalb der Unsicherheit der Rechnung eine befriedigende Übereinstimmung mit dem ursprünglichen Werte:

$$\cot J = 9,199873$$

zeigen.

§ 3.

Die in den vorangehenden Paragraphen aufgestellten differentiellen Verhältnisse ermöglichen es uns, etwas klarere Vorstellungen, wie bisher, über den Einfluss einer Ungenauigkeit in  $q_1$ ,  $q_3$  und  $M$  auf die Elemente zu gewinnen. Eine eingehende Erörterung derselben unter Heranziehung der verschiedenen Methoden der Bahnbestimmung würde den Rahmen dieser Arbeit überschreiten und muss einer späteren Abhandlung vorbehalten bleiben. Es soll hier vorläufig nur im allgemeinen auf einige Punkte aufmerksam gemacht werden.

Zunächst sei hervorgehoben, dass das in dem Formelsysteme I, Seite 28 auftretende Produkt  $ad \log q$  für je 2 Einheiten der sechsten Decimale von  $d \log q$  nahezu 1" beträgt. Da nun ein Fehler in  $M$  in den  $q$  bedeutend vergrößert auftreten kann, so wird eine Ungenauigkeit in  $M$  desto ungünstiger auf die Genauigkeit von  $l$ ,  $b$ ,  $\Omega$  und  $i$  wirken je größer die Koeffizienten von  $ad \log q$  in den Formeln I und II sind. Die Änderung von  $r$  ist gewöhnlich von derselben Ordnung als diejenige von  $q$ .

Die Koeffizienten von  $ad \log q$  in I und II können für hohe geozentrische Breiten (große Neigungen) und geringe heliozentrische Entfernungen des Kometen bedeutende Werte annehmen. Sind jedoch die Breiten klein und die Entfernungen ( $r$ ) groß, und beträgt außerdem die Differenz  $l - L$  nur wenige Grade, so ist der Einfluss einer Ungenauigkeit in den  $q$  auf die Bahnbestimmung ein geringer. Man kann sich bereits gleich nach Berechnung der heliozentrischen Koordinaten und ehe man zur Ableitung der Elemente schreitet, ein Urteil über die in denselben zu erwartende Genauigkeit durch Inspektion unserer Formeln verschaffen, soweit dieselbe von  $M$  und den  $q$  abhängt. Treten die erwähnten ungünstigen Umstände ein, so ist es ratsam, vorläufig auf die Berechnung der Elemente zu verzichten, wenn man über  $M$  nicht ganz sicher ist, und sich zunächst einen genaueren Wert zu verschaffen. Dabei sind diejenigen Formeln zu empfehlen, welche  $M$  aus den Zwischenzeiten und den heliocentrischen Distanzen ergeben, wie sie in letzter Zeit auch unter Zugrundelegung der Annäherung von Gibbs aufgestellt worden sind (siehe Seite 8 der auf Seite 2 citierten Schrift von Weiss). Hat man sich gemäß der im ersten Kapitel niedergelegten Prinzipien der für den gegebenen Fall geeignetsten Methode der Bahnbestimmung bedient, so werden die Änderungen in  $M$  selten bedeutend werden und man kann die neuen  $q$  auf differentiellern Wege ableiten, z. B. in Olber's und Oppolzer's Methoden, durch Benutzung von 8), Seite 15. Aber selbst wenn die Änderung in  $M$  erheblich ist, wird es bedeutend einfacher sein, auf die Neurechnung der Konstanten und die Wiederholung der Versuche in diesen beiden Methoden zu verzichten und sich der Formel 24 des folgenden Kapitels zu bedienen, durch welche die Änderung in  $q$ , einschliesslich von Größen zweiter Ordnung, in Bezug auf die Änderung in  $M$  gegeben ist.

Auf der anderen Seite wird uns die Inspektion der Differentialformeln unter Umständen belehren, dass durch Verbesserung von  $M$ ,  $q_1$  und  $q_3$  nichts gewonnen werden kann, und wird man sich dann den Versuch der Verbesserung der Elemente ersparen.

Denkt man sich in dem Formelsystem II  $d \log q_3$  durch  $d \log M + d \log q_1$  ersetzt, so wird der Koeffizient von  $d \log q_1$  theoretisch von der nullten Ordnung sein, während der Koeffizient von  $d \log M$  nur im Nenner einen Faktor von der Ordnung der Zwischenzeit hat, so dass bei kleinen heliozentrischen Bewegungen die Genauigkeit durch einen Fehler in  $M$  erheblich beeinträchtigt werden kann. Oppolzer hat bereits allgemein nachgewiesen, dass die Zwischenzeit im Nenner der Differentialquotienten auftritt.

Die Inspektion der Formeln zeigt auch, dass  $\omega$  und  $T$  theoretisch am meisten durch Fehler in den  $q$  beeinflusst werden.

### III. Die in der Änderung von $e_1$ auftretenden und von der Korrektur in $M$ abhängigen Glieder zweiter Ordnung.

Zur Ermittlung des Differentialquotienten zweiter Ordnung von  $e_1$  nach  $M$  soll von den Formeln ausgegangen werden, welche v. Oppolzer im ersten Bande seines Lehrbuches, Seite 302 et sequ., für den Differentialquotienten erster Ordnung aufgestellt hat. Zunächst ist:

$$\frac{de_1}{dM} = \frac{(r_1 + r_3 + s)^{1/2} \{P - e_1 \sin \Theta_3\} + (r_1 + r_3 - s)^{1/2} \{P + e_1 \sin \Theta_3\}}{(r_1 + r_3 + s)^{1/2} \{\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3 + h \sin \vartheta\} - (r_1 + r_3 - s)^{1/2} \{\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3 - h \sin \vartheta\}} = \frac{Z}{N}, \quad 1)$$

wo

$$P = \frac{e_1}{s} g \cos \beta_3 \cos (G - \lambda_3) - \frac{e_1^2}{s} [h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) \cos \beta_3 + h \sin \zeta \sin \beta_3]. \quad 2)$$

Die Bedeutung der hier auftretenden Symbole ist dieselbe wie in der Oppolzer'schen Darstellung der Methode von Olbers. Aus Gleichung 1) findet sich durch nochmalige Differentiation:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 e_1}{dM^2} &= \frac{N}{N^2} \left[ (r_1 + r_3 + s)^{1/2} \frac{d}{dM} \{P - e_1 \sin \Theta_3\} + (r_1 + r_3 - s)^{1/2} \frac{d}{dM} \{P + e_1 \sin \Theta_3\} \right] \\ &= \frac{Z}{N^2} \left[ (r_1 + r_3 + s)^{1/2} \frac{d}{dM} \{\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3 + h \sin \vartheta\} - (r_1 + r_3 - s)^{1/2} \frac{d}{dM} \{\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3 - h \sin \vartheta\} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{N}{N^2} \left[ \frac{P - e_1 \sin \Theta_3}{(r_1 + r_3 + s)^{1/2}} \frac{d(r_1 + r_3 + s)}{dM} + \frac{P + e_1 \sin \Theta_3}{(r_1 + r_3 - s)^{1/2}} \frac{d(r_1 + r_3 - s)}{dM} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{Z}{N^2} \left[ \frac{\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3 + h \sin \vartheta}{(r_1 + r_3 + s)^{1/2}} \frac{d(r_1 + r_3 + s)}{dM} - \frac{\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3 - h \sin \vartheta}{(r_1 + r_3 - s)^{1/2}} \frac{d(r_1 + r_3 - s)}{dM} \right]. \quad 3) \end{aligned}$$

Ersetzt man nun auf der rechten Seite  $N$  und  $Z$  durch ihre Werte nach Gleichung 1) und führt den bekannten Hilfswinkel  $\gamma$  ein nach der Relation:

$$\sin \gamma = \frac{s}{r_1 + r_3}, \quad 4)$$

nachdem Zähler und Nenner in den beiden ersten Ausdrücken durch  $(r_1 + r_3)$  dividiert und in den beiden letzten Ausdrücken mit  $\{(r_1 + r_3 + s)^{1/2} \cdot (r_1 + r_3 - s)^{1/2}\} : (r_1 + r_3)$  multipliziert worden sind, so erhält man nach einigen weiteren Reduktionen:

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 \varrho_1}{dM^2} = & \frac{\left[ h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right] \left[ \frac{dP}{dM} - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \frac{d}{dM} (\varrho_1 \sin \Theta_3) \right]}{\left[ h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right]^2} \\
 & - \frac{\left[ P - \varrho_1 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \sin \Theta_3 \right] \left[ \frac{d}{dM} h (\sin \vartheta) + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \frac{d}{dM} (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right]}{\left[ h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right]^2} \\
 + & \frac{\left[ h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right] \left[ \left( P + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \varrho_1 \sin \Theta_3 \right) \frac{d(r_1 + r_3)}{dM} - \left( \varrho_1 \sin \Theta_3 + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma P \right) \frac{ds}{dM} \right]}{2 \left[ h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right]^2 [(r_1 + r_3)^2 - s^2]^{1/2}} \\
 - & \frac{\left[ P - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \varrho_1 \sin \Theta_3 \right] \left[ \left\{ h \sin \vartheta - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right\} \frac{d(r_1 + r_3)}{dM} - \left\{ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma h \sin \vartheta - (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right\} \frac{ds}{dM} \right]}{2 \left[ h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right]^2 [(r_1 + r_3)^2 - s^2]^{1/2}}. \quad 5)
 \end{aligned}$$

Die beiden letzten Quotienten ergeben:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left[ h \sin \vartheta \varrho_1 \sin \Theta_3 + P (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right] \left[ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \frac{d(r_1 + r_3)}{dM} - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} \gamma \frac{ds}{dM} \right]}{\left[ h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \right]^2 [(r_1 + r_3)^2 - s^2]^{1/2}}. \quad 6)
 \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$[(r_1 + r_3)^2 - s^2]^{1/2} = s \left[ \left( \frac{r_1 + r_3}{s} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} = +s \cot \gamma.$$

Setzt man außerdem:

$$A = h \sin \vartheta + \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) = A_1 + A_2 \quad 7)$$

$$B = P - \varrho_1 \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \sin \Theta_3 = B_1 - B_2, \quad 8)$$

so ist die Summe der beiden letzten Quotienten in Gleichung 5):

$$\frac{2 [A_1 B_2 + A_2 B_1] \left[ \operatorname{tang} \frac{1}{2} \gamma \frac{d(r_1 + r_3)}{dM} - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} \gamma \frac{ds}{dM} \right]}{\left( 1 - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \gamma \right) s A^2}. \quad 9)$$

Es müssen nun folgende Differentialquotienten abgeleitet werden:

$$\frac{dP}{dM}, \frac{d(\varrho_1 \sin \Theta_3)}{dM}, \frac{d(h \sin \vartheta)}{dM}, \frac{d \sin \Theta_1}{dM}, \frac{d(M \sin \Theta_3)}{dM}, \frac{d(r_1 + r_3)}{dM} \text{ und } \frac{ds}{dM}$$

Aus dem bekannten Gleichungssystem, durch welches die Hilfsgrößen  $h$ ,  $\zeta$  und  $H$  definiert werden (Oppolzer, Seite 292), erhält man sofort:

$$\frac{d}{dM} [h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) \cos \beta_3 + h \sin \zeta \sin \beta_3] = 1;$$

daher:

$$\frac{dP}{dM} = -\frac{\varrho_1^2}{s} - \frac{\varrho_1}{s} [h \cos \zeta \cos (H - \lambda_3) \cos \beta_3 + h \sin \zeta \sin \beta_3] \frac{d\varrho_1}{dM} + \frac{Ps}{\varrho_1} \frac{s \frac{d\varrho_1}{dM} - \varrho_1 \frac{ds}{dM}}{s^2}.$$

Es ist aber  $ds = h \sin \vartheta d\varrho_1 - PdM$ , daher auch: 10)

$$\frac{s \frac{d\varrho_1}{dM} - \varrho_1 \frac{ds}{dM}}{s^2} = \frac{s \frac{d\varrho_1}{dM} - \varrho_1 (h \sin \vartheta \frac{d\varrho_1}{dM} - P)}{s^2} = \frac{s - \varrho_1 h \sin \vartheta}{s^2} \frac{d\varrho_1}{dM} + \frac{\varrho_1}{s^2} P.$$

Setzt man diesen Ausdruck in  $\frac{dP}{dM}$  ein und bezeichnet der Kürze halber von an nun die beiden Teile von  $P$  (Gleichung 2)) mit  $+P_1$  und  $-P_2$ , so ergibt sich:

$$\frac{dP}{dM} = -\frac{\varrho_1^2}{s} + \frac{P^2}{s} + \left[ \frac{P}{\varrho_1} \frac{s - \varrho_1 h \sin \vartheta}{s} - \frac{P_2}{\varrho_1} \right] \frac{d\varrho_1}{dM}. \quad 11)$$

Ferner ist:

$$\frac{d}{dM} \cos \Theta = \frac{d}{dM} \left( \frac{R \sin \psi}{r} \right) = -\frac{R \sin \psi}{r^2} \frac{dr}{dM} = -\frac{\cos \Theta}{r} \frac{dr}{dM},$$

oder auch

$$\sin \Theta \frac{d\Theta}{dM} = \frac{\cos \Theta}{r} \frac{dr}{dM}.$$

Benutzt man daher die Relationen, (Oppolzer Seite 302):

$$dr_1 = \sin \Theta_1 d\varrho_1 \text{ und } dr_3 = M \sin \Theta_3 d\varrho_1 + \varrho_1 \sin \Theta_3 dM, \quad 12)$$

so findet sich:

$$\frac{d(r_1 + r_3)}{dM} = \varrho_1 \sin \Theta_3 + (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) \frac{d\varrho_1}{dM}, \quad 13)$$

$$\frac{d\Theta_1}{dM} = \frac{\cos \Theta_1}{r_1} \frac{d\varrho_1}{dM}, \quad \frac{d\Theta_3}{dM} = \frac{\varrho_1 \cos \Theta_3}{r_3} + \frac{M \cos \Theta_3}{r_3} \frac{d\varrho_1}{dM}, \quad 14)$$

und schliesslich:

$$\frac{d \sin \Theta_1}{dM} = \frac{\cos^2 \Theta_1}{r_1} \frac{d\Theta_1}{dM}, \quad \frac{d \sin \Theta_3}{dM} = \frac{e_1 \cos^2 \Theta_3}{r_3} + \frac{M \cos^2 \Theta_3}{r_3} \frac{de_3}{dM}, \quad 15)$$

$$\frac{d(e_1 \sin \Theta_3)}{dM} = e_1^2 \frac{\cos^2 \Theta_3}{r_3} + \left( \sin \Theta_3 + \frac{e_1 M \cos^2 \Theta_3}{r_3} \right) \frac{de_1}{dM}, \quad 16)$$

$$\frac{d(M \sin \Theta_3)}{dM} = \sin \Theta_3 + \frac{M e_1 \cos^2 \Theta_3}{r_3} + \frac{M^2 \cos^2 \Theta_3}{r_3} \frac{de_1}{Md}. \quad 17)$$

Um den Differentialquotienten  $\frac{d(h \sin \vartheta)}{dM}$  abzuleiten, benutzt man die Gleichungen:

$$\cos \vartheta = \frac{g \sin \varphi}{s}, \quad e_1 = \frac{g}{h} \sin \varphi \tan \vartheta + \frac{g}{h} \cos \varphi,$$

woraus folgt:

$$h^3 e_1 = s(h \sin \vartheta) + g(h \cos \varphi).$$

Die Differentiation dieser Gleichung ergibt:

$$e_1 \frac{d(h^2)}{dM} + h^2 \frac{de_1}{dM} = h \sin \vartheta \frac{ds}{dM} + s \frac{d(h \sin \vartheta)}{dM} + g \frac{d(h \cos \varphi)}{dM}.$$

Da nun (Oppolzer, Seite 302):

$$\frac{d(h^2)}{dM} = 2[h \cos \zeta \cos(H - \lambda_3) \cos \beta_3 + h \sin \zeta \sin \beta_3] = \frac{2s}{e_1^2} P_2,$$

$$\frac{d(h \cos \varphi)}{dM} = \cos \beta_3 \cos(\lambda_3 - G) = \frac{s}{g e_1} P_1,$$

so erhält man unter gleichzeitiger Anwendung der bereits früher benutzten Gleichung 10):

$$\begin{aligned} \frac{d(h \sin \vartheta)}{dM} &= \left( \frac{h^2}{s} - \frac{h^2 \sin^2 \vartheta}{s} \right) \frac{de_1}{dM} + \frac{Ph \sin \vartheta}{s} + \frac{2P_2}{e_1} - \frac{P_1}{e_1} \\ &= \frac{P_2}{e_1} - \frac{P}{e_1} \frac{s - e_1 h \sin \vartheta}{s} = \frac{h^2 \cos^2 \vartheta}{s} \frac{de_1}{dM}. \end{aligned} \quad 18)$$

Es sollen nun zunächst die Relationen 10) und 13) in den Ausdruck 9) eingeführt werden. Man erhält dann:

$$\frac{2[A_1 B_2 + A_2 B_1]}{(1 - \tan^2 \frac{1}{2} \gamma) s A^2} \left[ \tan \frac{1}{2} \gamma e_1 \sin \Theta_3 + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} \gamma P + \left\{ \tan \frac{1}{2} \gamma (\sin \Theta_1 + M \sin \Theta_3) - \frac{1}{2} s \epsilon c^2 \frac{1}{2} \gamma h \sin \vartheta \right\} \frac{de_1}{dM} \right].$$



Da nun aber:

$$\frac{d\varrho_1}{dM} = \frac{B}{A} = \frac{B_1 - B_2}{A_1 + A_2}, \quad 19)$$

so kann der obige Ausdruck auch geschrieben werden:

$$\frac{2[A_1 B_2 + A_2 B_1]}{(1 - \tan \frac{1}{2} \gamma) s A^3} \left[ \left( B_2 + \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} \gamma B_1 \right) (A_1 + A_2) + \left( A_2 - \frac{1}{2} \sec^2 \frac{1}{2} \gamma A_1 \right) (B_1 - B_2) \right],$$

oder auch nach einigen Umformungen:

$$- \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma}{1 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma} \frac{[A_1 B_2 + A_2 B_1]^2}{s A^3}. \quad 20)$$

Es erübrigt nun noch die Differentialquotienten in Gleichungen 11), 15), 16) und 18) in die beiden ersten Glieder rechter Hand der Gleichung 5) einzusetzen. Es findet sich dadurch folgender Ausdruck für die Summe dieser beiden Glieder:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{A^2} \left[ -\frac{\varrho_1^2}{s} + \frac{P^2}{s} - \tan \frac{1}{2} \gamma \frac{\varrho_1^2 \cos^2 \Theta_3}{r_3} \right] - \frac{B}{A^2} \left[ \frac{P_2}{\varrho_1} - \frac{P s - \varrho_1 h \sin \vartheta}{s} \right. \\ & \quad \left. + \tan \frac{1}{2} \gamma \left( \sin \Theta_3 + \frac{M \varrho_1}{r_3} \cos^2 \Theta_3 \right) \right] \\ & + \left\{ \frac{A}{A^2} \left[ -\frac{P_2}{\varrho_1} + \frac{P s - \varrho_1 h \sin \vartheta}{s} - \tan \frac{1}{2} \gamma \left( \sin \Theta_3 + \frac{M \varrho_1}{r_3} \cos^2 \Theta_3 \right) \right] \right. \\ & \quad \left. - \frac{B}{A^2} \left[ \frac{h^2 \cos^2 \vartheta}{s} + \tan \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{\cos^2 \Theta_1}{r_1} + \frac{M^2 \cos^2 \Theta_3}{r_3} \right) \right] \right\} \frac{d\varrho_1}{dM}. \quad 21) \end{aligned}$$

Mit Rücksicht auf Gleichung 19) wird das zweite Glied dieses Ausdruckes gleich dem ersten der beiden Glieder, welche den Faktor  $\frac{d\varrho_1}{dM}$  enthalten. Fasst man nun die beiden Teile 20) und 21) zusammen, so geht die Gleichung 5) über in:

$$\begin{aligned} A^2 \frac{d^2 \varrho}{dM^2} &= A \left[ \frac{\varrho_1^2}{s} - \frac{P^2}{s} + \tan \frac{1}{2} \gamma \frac{\varrho_1^2 \cos^2 \Theta_3}{r_3} \right] + 2 B \left[ \frac{P^2}{\varrho_1} - \frac{P s - \varrho_1 h \sin \vartheta}{s} \right. \\ & \quad \left. + \tan \frac{1}{2} \gamma \left( \sin \Theta_3 + \frac{M \varrho_1}{r_3} \cos^2 \Theta_3 \right) \right] \\ & + \frac{B^2}{A} \left[ \frac{h^2 \cos^2 \vartheta}{s} + \tan \frac{1}{2} \gamma \left( \frac{\cos^2 \Theta_1}{r_1} + \frac{M^2 \cos^2 \Theta_3}{r_3} \right) \right] + \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma}{1 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma} \left[ \frac{A_1 B_2 + A_2 B_1}{s A} \right]^2. \quad 22) \end{aligned}$$

Die Summe der den Faktor  $\tan \frac{1}{2} \gamma \frac{\cos^2 \Theta_3}{r_3}$  enthaltenden Glieder der eckigen Klammerausdrücke zieht sich zusammen in:

$$\frac{\tan \frac{1}{2} \gamma \cos^2 \Theta_3}{r_3 A} [A \varrho_1 + BM]^2.$$

Der übrige Teil der beiden ersten Klammerausdrücke lässt sich schreiben:

$$\frac{A}{s} [\varrho_1^2 - P^2] + \frac{2B}{\varrho_1} \left[ P_2 - P + \frac{P \varrho_1 A_1}{s} + B_2 \right] = \frac{A}{s} [\varrho_1^2 - P^2] + \frac{2B}{\varrho_1} \left[ P_2 - B + \frac{P \varrho_1 A_1}{s} \right].$$

Es wird daher:

$$A^2 \frac{d^2 \varrho_1}{dM^2} = \frac{A[\varrho_1^2 - P^2] + 2BA_1 P}{s} + \frac{2B}{\varrho_1} [P_2 - B] + \frac{B^2}{A} \left[ \frac{h^2 \cos^2 \vartheta}{s} + \tan \frac{1}{2} \gamma \frac{\cos^2 \Theta_1}{r_1} \right] + \frac{\tan \frac{1}{2} \gamma \cos^2 \Theta_3}{r_3 A} [A \varrho_1 + BM]^2 + \frac{1 + 2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma}{1 - 2 \cos^2 \frac{1}{2} \gamma} \frac{[A_1 B_2 + A_2 B_1]^2}{sA}. \quad 23)$$

Hat man, wie dies auf Seite 16 empfohlen wurde, den Differentialquotienten  $\frac{d\varrho_1}{dM}$  bei der Bahnbestimmung mitgerechnet, so ist man im Besitze aller in dieser Formel auftretenden Größen. Man kann daher leicht entscheiden, ob Oppolzer's Formel 8), Seite 15 zur Verbesserung von  $\varrho_1$  genügt. Genügt sie nicht, so giebt die Hinzuziehung der Formel 23) das Mittel an die Hand, bedeutend schneller, als dies durch Neurechnung der Konstanten und Wiederholung der Versuche geschehen könnte, den neuen Wert von  $\varrho_1$  zu finden, denn so kompliziert die Formel auch aussieht, so einfach ist sie in der Berechnung, da die Logarithmen aller Hilfsgrößen bereits bekannt sind und dieselbe nur drei- oder vierstellig geführt zu werden braucht.

Man hat dann also zur Berechnung der vollständigen Änderung in  $\varrho_1$ , einschließlich derjenigen Glieder, welche vom Quadrate der Korrektur in  $M$  abhängen:

$$\Delta \varrho_1 = \frac{d\varrho_1}{dM} \Delta M + \frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho_1}{dM^2} (\Delta M)^2, \quad 24)$$

wo alle notwendigen Größen durch v. Oppolzer's Formel 8), Seite 15, und die Formeln 7) und 8), Seite 42, sowie 23), Seite 46 gegeben sind.

Für das auf Seite 30 angeführte Beispiel betrug:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \varrho_1}{dM^2} (\Delta M)^2 = 0.00000024,$$

so dass in diesem Falle die Korrektur von  $\varrho_1$  auf differentiellem Wege selbst dann noch ausreichend gewesen wäre, wenn die Änderung in  $M$  beträchtlich größer gewesen wäre.

